现代应用数学丛书

随机过程

〔日〕伊藤 清 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

随机过程

〔日〕伊藤清 著
刘璋溫 譯
郑紹濂 校

上海科学技术出版社

内容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共五章，第一章以測度論的观点介紹了概率論的基本概念，第二章叙述可加过程和可加級列的一般理論，第三章闡述平稳过程的基础理論，第四、五章为 Markoff 过程，把基础部分放在第四章，而把关于扩散的一些現代理論和方法放在第五章。为了便于讀者对 Markoff 过程的了解，书末另附一篇 Kolmogoroff 的"概率論的解析方法"作为附录。本书可供高等学校数学系、物理系师生及工程师作参考。

現代应用数学丛书

随　机　过　程

原书名　确　率　过　程
原著者　〔日〕伊　藤　　清
原出版者　岩　波　书　店
譯　者　刘　　璋　　溫

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
中华书局上海印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印張8 6/32　字数193,000
1961年7月第1版　1961年7月第1次印刷
印数 1—3,000

統一书号：13119·407
定　价：(十四)1.40元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"现代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成40种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要内容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯者序

本书是根据伊藤清著"确率过程" I 和 II 翻譯的。伊藤的原著是日本岩波书店从 1957 年起連續出版的一套"岩波讲座　現代应用数学"基础篇中的两本。

随机过程是概率論的一个主要組成部分，它的研究与現代科学技术有密切的关系。本书以不大的篇幅用簡练的笔法对随机过程論的几个主要方面和一些最新成就作了精练和严格的闡述。对于具有初步概率論和泛函分析知識的讀者来說，通过这一本书，可以較快地掌握現代随机过程的基本理論和发展方向。

本书的翻譯工作是在 Е. Б. Дынкин 教授的鼓励和当时中国科学院数学研究所概率論組全体同志的大力支持下进行的。1958 年春天，Е. Б. Дынкин 教授来我国讲学，他通过譯者的介紹了解到原书的內容后，非常称讚，并建議早日把它翻譯出来（Дынкин 教授回国后在苏联亦組織了翻譯，在他的指导下本书的俄譯本第一册已于 1961 年出版）。本譯稿是在 1958 年 6 月底完成的，其中第 4 章的前几节为余潜修先生所譯。随后譯稿一直流傳于北京大学，复旦大学和南开大学，作为专門化的参考教材。这次承复旦大学郑紹濂同志和南开大学王梓坤同志分別整理前三章和后两章，并由郑紹濂同志統一校訂。校样排出后，譯者重新校閱了一遍，根据原文又作了一些修正。

本书的出版，是与上列許多同志的帮助分不开的。譯者在此对他們表示深切的感謝。

刘璋溫 1961 年 4 月北京

目　　录

第1章 基本概念

§1 測度論观点下的概率論(1) 直观的背景

假設甲、乙二人擲錢币，以先擲出正面者为胜。現在試註甲先擲而来考虑下列問題：

(i) 甲胜的概率是多少；

(ii) 直到决定胜負为止所擲的平均次数是多少？

首先，观察这种比賽，它可能出現哪些結果。若以 O 表示擲出正面，U 表示擲出反面，則可能产生的結果为

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1=O \\ \omega_2=UO \\ \omega_3=UUO \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n=\underbrace{UU\cdots U}_{(n-1)}O \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_\infty=UUU\cdots \end{array}\right. \tag{1.1}$$

ω_1 是甲先擲出正面而結束比賽的情形，ω_2 是甲擲出反面，乙擲出正面而結束比賽的情形。ω_{n-1} 是直到第 $n-1$ 次为止二人都擲出反面，在第 n 次才擲出正面而結束比賽的情形，因此可由 n 的奇偶来决定甲或者乙的获胜。最后，ω_∞ 是甲、乙双方老是擲出反面的情形，这时比賽将无限制地継續下去。由于 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\infty$ 是这种比賽經过的各种样本，所以叫做**样本点**(sample point)，其全体的集合 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\infty\}$ 就叫做**样本空間**(sample space)。

現在来考虑各个样本点的概率。第1次擲出正面或者反面，这都是同等可能的，所以 ω_1 的概率是 $1/2$，而剩下的 $\{\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_\infty\}$

全体的概率就应該是1/2. 又由同样的理由，后者的概率1/2应平均地分給 ω_2 和剩下的 $\{\omega_3, \omega_4, \cdots, \omega_\infty\}$，即各为1/4。据此可知，分布于各个点 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\infty$ 上的概率分別为 $1/2, 1/4, 1/8, \cdots, 0$.

以 $P(\omega)$ 表示分布于 ω 上的概率。于是就有

$$P(\omega_1)=1/2,\ P(\omega_2)=1/4,\ \cdots, \quad P(\omega_n)=1/2^n,\ \cdots,\ P(\omega_\infty)=0. \tag{1.2}$$

又若 E 为 Ω 的子集合，則分布于 E 上的概率是分布于 E 的各点上的概率的总和，即

$$P(E)=\sum_{\omega\in E}P(\omega). \tag{1.3}$$

这样一来，就得到了一个集合函数 $P(E)$. 这个集合函数叫做**概率分布**(probability distribution)。

其次，考虑(ii)的問題。直到决定胜負为止的次数可由各个样本点所唯一决定。譬如 ω_1 时为1, ω_2 时为2, ω_n 时为 n. 这就是定义在样本空間上的函数，以 $x(\omega)$ 来表示。在样本空間上如此定义的函数叫做**随机变数**(random variable)。問題(ii)就是去求随机变数 $x(\omega)$ 的平均値。平均値有各种各样的定义方法，而最普遍被采用的是以下的所謂**数学期望**(expectation):

$$E(x)=\sum_{\omega\in\Omega}x(\omega)P(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(\omega_n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{2^n}=2. \tag{1.4}$$

現在轉到問題(i)上去。所謂甲胜就是上述的 $x(\omega)$ 为奇数的場合，因此可用条件"$x(\omega)$=奇数"来表示。这种可以由有关样本点 ω 的条件来表示的事情就叫做**事件**(event)。事件的概率規定为分布于滿足該条件的样本点全体的集合 E(这叫做該事件的**外延**(extension))上的概率 $P(E)$. 因此

$$P(\text{甲胜})=P(E)=\sum_{n=0}^{\infty}P(\omega_{2n+1})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{2}{3}. \tag{1.5}$$

現在把上例中的本質部分抽出来看一看。首先，作为基础的

东西就是命名为样本空間的集合 Ω 和它上面的概率分布 P．此外，还有一个定义在 Ω 上而称为随机变数的函数[1]，它的数学期望由(1.4)左端的等式来定义。与 Ω 里的点有关的条件叫做事件，而該事件的概率就可規定为 P 对其外延 E 的值 $P(E)$．但在这种一般的場合下，如何来給出概率分布就需要討論一下。由上面的例子可知，假如 Ω 为一可数集合，只要給予各个样本点的概率使得其总和为 1，則就可由(1.3)給出它的概率分布。但是，在把直綫上的点集、平面上的点集、以及更一般的，例如做 Brown 运动的粒子的各种各样的运动途徑的集合分别看做是 Ω 的場合下，按照上述朴素的方法就不可能給出概率分布。然而，若注意到概率分布的想法类似于質量分布，而后者的数学理論就是測度論，由此，很自然的可以設想，測度論也将适用于概率分布。

正是基于这种出发点，我們把概率論构造成为測度論的形式，因而使得长期以来以常識或者直观为基础，而且缺乏严格的邏輯推理的概率論真正成为数学理論的一个分支，并且已在許多的应用上获得了有价值的成果。

§2 概率分布

令 X 为一个集合，$\boldsymbol{B}$ 为由 X 的子集所构成的 Borel 集合体。对于 $\boldsymbol{B}$ 的元素(集合)定义了 Lebesgue 測度 $P(E)$，而且滿足

$$P(X)=1 \tag{2.1}$$

时，就称 P 为 $X(\boldsymbol{B})$ 上的**概率測度** (probability measure) 或者**概率分布**，或簡称为**分布**。

首先，作为最簡单的情况，試考虑 X 为有限集合时的情形。令 X 的元素为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$．这时通常可将 $\boldsymbol{B}$ 取为由 X 所有

[1] 随机变数的严格的定义将在下面講到。此处的定义只适用于样本空間只包含可数个元素的情形。——校者注

的子集組成的集合 2^X. 若只包含一个点的集合的測度 $P(x_1)$, $P(x_2)$, $\cdots$, $P(x_n)$ 已給定,則由測度的可加性,对任意的 $E\subseteq X$ 的概率可以定义为

$$P(E)=\sum_{x\in E}P(x). \tag{2.2}$$

因此,在这样的場合下,只須給定点函数 $P(x)$ 就可决定概率分布了。显然,$P(x)$ 应滿足下述的条件

$$P(x)\geqslant 0,\quad \sum P(x)=1. \tag{2.3}$$

特别是当 $P(x)$ **不依賴于** x,而且 $P(x)=1/n$ 时,就称 P 为**一致分布** (uniform distribution) ❶。

其次,对于 X 是可数无限集合的情形,它与有限集合的情况大致相同。但此时不再存在一致分布了。

当 X 是实数集合 R^1 时,問題就較困难了。除了个别的特殊情况外,$\boldsymbol{B}$ 不可能取为由 R^1 的所有子集組成的集合 2^{R^1}. $\boldsymbol{B}$ 的最自然的取法是取为包含所有开集的最小 Borel 集合体 $\boldsymbol{B}^1$. 通常称 $\boldsymbol{B}^1$ 的元素为 **Borel 集合**。令 P 为 $R^1(\boldsymbol{B}^1)$ 上的概率分布。对 $x\in R^1$ 的任意邻域 U,若它的 P-測度 $P(U)$ 为正时,就称 x 为 P 的負荷点,而这样的点的全体的集合就叫做 P 的**負荷者** (support)。特别若 $P(x)>0$,則显然 x 是 P 的負荷点,对于这样的 x,我們另外給它一个名称,叫做 P **的不連續点** (discontinuity point)。P 的不連續点的全体 D 至多是一可数集合。当 $P(D)=1$ 时,称 P 为**純粹不連續** (purely discontinuous),而 $P(D)=0$ 时,就称 P 为**連續** (continuous)。作为比連續稍微强的条件,有**絕对連續** (absolutely continuous) 的概念。若 E 的通常的 Lebesgue 測度 $|E|=0$ 时,必有 $P(E)=0$,則称 P 为絕对連續。这时 P 具有密度,而且可写为

$$P(E)=\int_E f(x)\,dx. \tag{2.4}$$

---

❶ 也称为均匀分布。——校者注

此处 $f(x)$ 应满足的条件是

$$f(x)\geqslant 0,\quad \int_{R^1} f(x)\,dx=1. \tag{2.5}$$

虽是連續、但不是絕对連續的概率分布叫做奇异(singular)分布。純粹不連續分布,絕对連續分布和奇异分布是在 $R^1(\boldsymbol{B}^1)$ 上的分布中重要的三种形狀,而任意的分布都可以由这三种形狀的分布的**凸組合** (convex combination) 来表示。(所謂 a 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的凸組合,就是指能够写成 $a=\sum c_i a_i$, $c_i\geqslant 0$, $\sum c_i=1$ 的形狀)。这就是 **Lebesgue 的分解定理。**

例 1 δ 分布(delta distribution) $\delta(\cdot;a)$. 这是純粹不連續分布,也就是上述的 D 只含有一点 a 的場合。特别当 $a=0$ 时就叫做**单位分布**(unitary distribution)。

例 2 二項分布(binomial distribution) $B(\cdot;p,n)$, $0<p<1$, n 是自然数。这是純粹不連續分布,也就是由 $D=\{0,1,2,\cdots,n\}$,

$$P(k)=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k},\quad q=1-p,\quad k=0,1,2,\cdots,n \tag{2.6}$$

給定的分布。因为 $P(k)$ 等于 $(p+q)^n$ 展开式中的第 k 項,所以有二項分布的名称。

例 3 Poisson 分布 (Poisson distribution) $P(\cdot;\lambda)$, $\lambda>0$. 这是純粹不連續分布,也就是由 $D=\{0,1,2,\cdots\}$,

$$P(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{2.7}$$

給定的分布。

例 4 正态分布 (normal distribution) $N(\cdot;a,v)$, a 是实数, $v>0$. 这是絕对連續分布,密度由下式給定:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2v}} \tag{2.8}$$

例 5 Cauchy 分布(Cauchy distribution) $C(\cdot;a,c)$, a 是实数, $c>0$, 这是絕对連續分布,密度由下式給定:

$$f(x)=\frac{c}{\pi}\cdot\frac{1}{c^2+(x-a)^2} \tag{2.9}$$

当 X 为 m 維空間 R^m 时，仍然可以照 R^1 的場合将結果推广。$\boldsymbol{B}$ 与一維的情况同样，是包含所有开集的最小 Borel 集合体 $\boldsymbol{B}^m$。$\boldsymbol{B}^m$ 的元素叫做 Borel 集合。与上述一样，分布有三个形状，并且 Lebesgue 的分解定理成立。

例6　δ分布　$\delta(\cdot;\boldsymbol{a})$与一維的情况一样，不过 $\boldsymbol{a}$ 是 R^m 的元素而已。

例7　多項分布(multinomial distribution)　$B(\cdot;\boldsymbol{p},n)$，$n$ 是自然数，$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，$p_i\geqslant 0$，$\sum p_i=1$。这是純粹不連續分布，而 D 是格子点 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_m)$，$\sum k_i=n$，$k_i\geqslant 0$ 的全体。

$$P(\boldsymbol{k})=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}. \tag{2.10}$$

例8　正态分布 $N(\cdot;\boldsymbol{a},V)$，$\boldsymbol{a}$ 是 R^m 的元素，V 是对称正定(狭义)矩陣。这是絕对連續的，其密度为

$$f(\boldsymbol{x})=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}(\det V)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}))\right\}. \tag{2.11}$$

此处 $V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$是把綫性变换 V 作用于矢量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ 而得的，(,)表示内积。

如上所述，从一維的 R^1 的情形可平行地推广到 m 維的 R^m 的情形，但是从 m 維推广到无限維时却有本质上的困难。譬如在无限維的空間上，由于不存在象在 R^m 的場合下那样普通的 Lebesgue 测度，所以不可能定义象絕对連續那样的概念。若令 A 为任意的集合，那么 R^A 就是 A 中的元素 α 所对应的实数 ξ 排成的 $\prod_\alpha \xi_\alpha$ 全体的集合。若 A 是有限集合，则 R^A 是有限維空間，但若 A 为无限集合，则 R^A 是无限維。使 $\prod_\alpha \xi_\alpha\to\alpha_0$ 的坐标 ξ_{α_0} 的映象叫做射影(projection)，且以 p_{α_0} 来表示。由 $\prod_\alpha \xi_\alpha\to R^A$ 中的点 $(\xi_{\alpha_1},\xi_{\alpha_2},$

$\cdots, \xi_{\alpha_n})$ (α_i 都不相同)的映象也叫做射影，以 $p_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 来表示。若令 $E^{(n)}$ 为 n 維的 Borel 集合，由形状如 $p^{-1}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(E^{(n)})$ 所表示的 R^A 的子集就叫做 R^A 的 **Borel 柱集** (cylinder set)。若以 $\boldsymbol{B}^A$ 表示包含所有 Borel 柱集的最小 Borel 集合体，則 $\boldsymbol{B}^A$ 的元素就叫做 R^A 的 **Borel 集合**。今令 P 为 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布。对于不相同的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in A$，定义 $R^n(\boldsymbol{B}^n)$ 上的分布 $P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$，使得

$$P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(E^{(n)}) = P(p^{-1}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(E^{(n)})), \ E^{(n)} \in \boldsymbol{B}^n. \qquad (2.12)$$

这就是分布 $\boldsymbol{P}$ 的射影。考虑所有这类的 $P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$，且令其全体为 $\mathfrak{P}$，則 $\mathfrak{P}$ 满足下面所述的 Kolmogoroff 的**相容性条件** (consistency condition)。

(K.1) 若令 $i(1), i(2), \cdots, i(n)$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的排列，則

$$P_{\alpha_{i(1)}\alpha_{i(2)}\cdots\alpha_{i(n)}}(E_{i(1)} \times E_{i(2)} \times \cdots \times E_{i(n)}) = P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n).$$

(K.2) $P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(E^{(n-1)} \times R^1) = P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}(E^{(n-1)})$.

反之，对于满足这二个条件的分布系 $\mathfrak{P}$，存在唯一的一个 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布 P，使得满足 (2.12)。这就叫做 Kolmogoroff 定理[1]。

现在，假設已对 A 的各个元素 α 定义了 $R^1(\boldsymbol{B}^1)$ 上的分布 P_α。这时若定义

$$P_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = P_{\alpha_1} \times P_{\alpha_2} \times \cdots \times P_{\alpha_n} \ (\text{直积测度}), \qquad (2.13)$$

則 $\mathfrak{P} = \{P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\}$ 满足上述的 (K.1), (K.2)。因此，按照 Kolmogoroff 定理，可以由 $\mathfrak{P}$ 定出 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布 P。称它为 $P_\alpha, \alpha \in A_1$ 的**直积概率测度** (direct product probability measure)，且以 $\prod_{\alpha \in A} P_\alpha$ 来表示。显然 P 是由

$$P(p^{-1}_{\alpha_1}(E_1) \cap p^{-1}_{\alpha_2}(E_2) \cap \cdots \cap p^{-1}_{\alpha_n}(E_n)) = \prod_{i=1}^{n} P_{\alpha_i}(E_i) \qquad (2.14)$$

所表达的 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布。同理 P_α 分别为高維（有限或者无

---

[1] 参見 A. H. Колмогоров 著：概率論基本概念，丁寿田譯，商务，1953. ——校者注

限)的分布时(維数可以由 α 而变)也可以定义其直积概率测度。

§3 測度論观点下的概率論(2)　邏輯的构成

固定一个集合 Ω,这集合就叫做样本空間。在 Ω 上取一Borel 集合体 $\boldsymbol{B}$, 及 $\Omega(\boldsymbol{B})$ 上的概率分布 P, 则 Ω, $\boldsymbol{B}$, P 有一个总的名称,叫做 Ω 上的**概率空間**(probability space), 并記以 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$.

因为 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 是一种测度空間,所以在其上可以建立 Lebesgue 的积分理論。$\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 上的可测实函数叫做**随机变数**(random variable)。令 $x(\omega)$ 为随机变数,则称

$$\Phi(E)=P\{\omega/x(\omega)\in E\}\equiv P(x^{-1}(E)), E\in \boldsymbol{B}^1 \qquad (3.1)$$

为 x 的**分布** (distribution)。这就是 $R^1(\boldsymbol{B}^1)$ 上的概率分布。称

$$E(x)=\int_\Omega x(\omega)P(d\omega) \qquad (3.2)$$

为 $x(\omega)$ 的**数学期望或均值** (mean)。这可以利用 x 的分布写成下面的形式[1]

$$E(x)=\int_{R^1}\xi\Phi(d\xi). \qquad (3.3)$$

因为可测函数不一定是可积的,所以随机变数的均值不一定存在。

将若干随机变数并列起来就可以定义随机矢量。令 A 为有限或者无限集合,且对于 A 的各个元素 α 有一随机变数 $x_\alpha(\omega)$ 与之对应。此时,若定义

$$\boldsymbol{x}(\omega)=\prod_{\alpha\in A}x_\alpha(\omega), \qquad (3.4)$$

则 $\boldsymbol{x}(\omega)$ 是定义于 Ω 上而在 R^A 中取値的函数。并且在

$$E^{(A)}\in\boldsymbol{B}^A\Rightarrow \boldsymbol{x}^{-1}(E^{(A)})\in\boldsymbol{B} \qquad (3.5)$$

的意义下为可测(即使得在映照 x 之下, E^A 的原象必属于 $\boldsymbol{B}$)。

---

[1] 参見 Paul R. Halmos 著: 測度論, 王建华譯, 科学出版社, 1958, §39, 定理3。——校者注

$\boldsymbol{x}(\omega)$ 就叫做随机矢量。若 A 的势为 m，則叫做 m 維随机矢量。特别是把二維随机矢量 $(x_1(\omega), x_2(\omega))$ 写成 $x_1(\omega)+ix_2(\omega)$，就得复随机变数。对于随机矢量来說，其分布也可以由(3.1)来定义，再对各个分量进行积分，就可以定义它的**均值矢量**。

令 φ 为由 R^A 到 R^B 內的映象，并且满足

$$E^{(B)} \in \boldsymbol{B}^B \Rightarrow \varphi^{-1}(E^{(B)}) \in \boldsymbol{B}^A. \tag{3.6}$$

这时 φ 叫做 **Borel 可測** (Borel measurable) 或称 **$\boldsymbol{B}$-可測** (B-measurable)或者更簡单地叫做**可測**(measurable)。由随机矢量的可測映象所产生的象是可測的。也就是說，若把上述的可測映象 φ 作用于取值于 R^A 內的随机矢量 $\boldsymbol{x}(\omega)$ 上，就得到一个在 R^B 內取值的随机矢量 $\varphi(\boldsymbol{x}(\omega))$。这时 $\varphi(\boldsymbol{x}(\omega))$ 的均值矢量可由

$$E[\varphi(\boldsymbol{x}(\omega))] = \int_{R^A} \varphi(\xi)\Phi(d\xi), \ \Phi \text{ 是 } \boldsymbol{x}(\omega) \text{ 的分布} \tag{3.7}$$

給定。这样的 $\varphi(\boldsymbol{x}(\omega))$ 称为**关于 $\boldsymbol{x}(\omega)$ 是可測的**。

若有若干随机矢量 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha \in A$，也可以把它們排列起来定义更高維的随机矢量

$$\boldsymbol{x}(\omega) = \prod_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha(\omega). \tag{3.8}$$

若 $\boldsymbol{x}(\omega)$ 的分布是 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha \in A$ 的分布的直积分布，則称 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha \in A$ **为独立**(independent)。这也可以由下述条件来表达：

对任意不相同的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in A$，則有

$$P\{\omega/\boldsymbol{x}_{\alpha_i}(\omega) \in E_i, \ i=1, 2, \cdots, n\} = \prod_{i=1}^n P\{\omega/x_{\alpha_i}(\omega) \in E_i\}. \tag{3.9}$$

設 $A=\sum_\lambda A_\lambda$ (直接和)，$\lambda \in \Lambda$，且令 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha \in A$，为独立，則

$$\boldsymbol{y}_\lambda(\omega) = \prod_{\alpha \in A_\lambda} x_\alpha(\omega), \ \lambda \in \Lambda \tag{3.10}$$

亦为独立。又若令 $\boldsymbol{x}_\alpha(\omega)$，$\alpha \in A$，为独立，且令 φ_α 为可測，則 $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha(\omega))$，$\alpha \in A$，也为独立。

若 $x_1(\omega), x_2(\omega), \cdots, x_n(\omega)$ 是独立的复(或者实)随机变数，则

$$E[x_1(\omega)\cdots x_n(\omega)]=E[x_1(\omega)]E[x_2(\omega)]\cdots E[x_n(\omega)]. \tag{3.11}$$

这叫做均值的**可乘性**。

关于随机变数(或者矢量)的叙列 $x_n(\omega)$，$n=1, 2, \cdots$ 收敛于 $x(\omega)$ 的定义有各种各样的方法。一个最自然的方法是

$$P\{\omega/|x_n(\omega)-x(\omega)|\to 0\}=1, \tag{3.12}$$

此处 $|\ \ |$ 表示矢量的长度。因为 $|x_n(\omega)-x(\omega)|$ 是 ω 的可测函数，并且

$$\{\omega/|x_n(\omega)-x(\omega)|\to 0\}=\bigcap_p\bigcup_N\bigcap_{n>N}\left\{\omega/|x_n(\omega)-x(\omega)|<\frac{1}{p}\right\},$$

所以(3.12)左边的 $\{\omega/\text{〃}\}$ 是可测集合。而(3.12)即意味着它的 P-测度为1. 这种收敛叫做 Ω 上的**几乎处处**(almost everywhere)**收敛**，或概率为1的收敛，或**几乎必然的收敛**(almost sure convergence)，或**概收敛**，并記为 $x_n\to x$(a. e.)❶。

下面是較此为弱的一种收敛概念：对所有的 $\varepsilon>0$，极限

$$P\{\omega/|x_n(\omega)-x(\omega)|>\varepsilon\}\to 0 \tag{3.13}$$

恒成立。这叫做依概率收敛(convergence in probability)，并記为 $x_n\to x(P)$. 这时 x_n 的分布就以下一节中所解释的意义收敛于 x 的分布。又若当 $E(|x_n-x|^p)$ 为有限时，由

$$E(|x_n-x|^p)\to 0 \tag{3.14}$$

所定义的收敛，叫做 **p 冪平均收敛** (mean convergence of the pth power)。当 $p=2$ 时这一經常用到的情形，称它做**平均收敛**。这种收敛的条件較依概率收敛的条件为强。

§4 分布函数，特征函数，均值和方差

以 $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \cdots$ 表示 $R^1(\boldsymbol{B}^1)$ 上的分布。称函数

$$F(\xi)=\Phi(-\infty, \xi] \tag{4.1}$$

---

❶ a. e. 是 almost everywhere 的簡写。

为 Φ 的分布函数(distribution function)。$F(\xi)$ 应满足的条件是

(i) 非　降：$\xi<\eta \Rightarrow F(\xi)\leqslant F(\eta)$，

(ii) 右連續：$F(\xi+0)=F(\xi)$，

(iii) $F(-\infty)=0,\qquad F(\infty)=1$。

反之，若 $F(\xi)$ 滿足以上条件，則它是由

$$\Phi(E)=\int_E dF(\xi) \quad \text{(Lebesgue-Stieltjes 积分)} \tag{4.2}$$

所决定的 $R^1(B^1)$ 上的分布 Φ 的分布函数。現在若令 $x(\omega)$ 为随机变数，則 $x(\omega)$ 的分布 Φ 的分布函数 $F(\xi)$ 可由等式

$$F(\xi)=P\{\omega/x(\omega)\leqslant\xi\} \tag{4.3}$$

給定。这也叫做 $x(\omega)$ 的分布函数。

由上可知，分布 Φ 和分布函数 F 之間存在着一一对应关系，所以可用分布函数来代表分布。若以 $F, F_1, F_2, \cdots$ 表示对应于 $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \cdots$ 的分布函数，則可将分布叙列 $\{\Phi_n\}$ 的收斂定义如下：

若对于 $F(\xi)$ 的所有連續点 ξ，均有[1]

$$F_n(\xi)\to F(\xi), \tag{4.4}$$

則規定为 $\Phi_n\to\Phi$。这一条件能写成下面的形式：

在 R^1 内稠密的点列 $\{\xi_m\}$ 上，成立着

$$F(\xi_m-0)\leqslant \varliminf_n F_n(\xi_m)\leqslant \varlimsup_n F_n(\xi_m)\leqslant F(\xi_m+0). \tag{4.4'}$$

或者，对于任意的有界連續函数 $f(\xi)$，下述极限关系成立：

$$\int_{R^1} f(\xi)\Phi_n(d\xi)\to\int_{R^1} f(\xi)\Phi(d\xi). \tag{4.4''}$$

若

$$\inf_n \Phi_n[-a, a]\to 1 \quad (a\to\infty), \tag{4.5}$$

則可以从 Φ_n 选取一子叙列，使之收斂于某一分布。

---

[1] 下面有关分布函数列收斂的一些結論，其証明可参見 M. Loève: Probability Theory, Van Nostrand, 1955, §11.——校者注

令 $$\varphi(z)=\int_{R^1} e^{iz\xi}\Phi(d\xi),\quad -\infty<z<\infty, \tag{4.6}$$

即为 Φ 的 Fourier 变换，此时称 φ 为 Φ 的**特征函数**(characteristic function)。若 Φ 是实随机变数 $x(\omega)$ 的分布，则

$$\varphi(z)=E(e^{izx}). \tag{4.7}$$

这就叫做 $x(\omega)$ 的特征函数。显然 $\varphi(z)$ 有下述的性质：

$$\varphi(0)=1,\quad |\varphi(z)|\leqslant 1, \tag{4.8}$$

在 $-\infty<z<\infty$ 内一致連續。 (4.9)

非負定：对于任意的复数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和任意的实数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$,

$$\sum a_i\bar{a}_j\varphi(z_i-z_j)\geqslant 0. \tag{4.10}$$

反之，一个非負定的函数 $\varphi(z)$，在 $z=0$ 連續且 $\varphi(0)=1$，則必为某一分布 Φ 的特征函数。这就是 **Bochner 定理**[1]。

令 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 分别为 $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \cdots$ 的特征函数，則成立着下面的 Φ 和 φ 的对应关系：

(i) $\varphi_1(z)\equiv\varphi_2(z) \Leftrightarrow \Phi_1=\Phi_2$.

(ii) $\varphi_n(z)\to\varphi(z)$ (对所有的 z) $\Leftrightarrow \Phi_n\to\Phi$.

(iii) 若 $\varphi_n(z)$ 在所有 z 上收斂于某一函数 $\theta(z)$ (并未假定 $\theta(z)$ 是某一分布的特征函数)，并且在 $z=0$ 的某些邻域内一致收斂时，則 $\theta(z)$ 就成为某一分布 Φ 的特征函数。因此，由(ii)得出 $\Phi_n\to\Phi$. 这些性質主要是由 P. Lévy 所获得的。

分布的均值(mean)和**方差**(variance)分别由

$$M(\Phi)=\int_{R^1}\xi\Phi(d\xi),\quad V(\Phi)=\int_{R^1}(\xi-M(\Phi))^2\Phi(d\xi) \tag{4.11}$$

来定义。可以这样說，均值是分布的中心，而方差就是表示分布的散布的程度。若令 Φ 为 $x(\omega)$ 的分布，則 $M(\Phi)$ 等于 $E(x)$，而

---

[1] 参見复旦大学数学系郑紹濂等編：概率論与数理統計，上海科学技术出版社，1961，§19.——校者注

$V(\Phi)$就等于$E[(x-E(x))^2]$．后者也記为$V(x)$，并叫做x的方差。显然，

$$V(x)=E(x^2)-E(x)^2. \tag{4.12}$$

令x_1, x_2为独立随机变数，x为其和。令x_1, x_2, x的分布各为Φ_1, Φ_2, Φ；分布函数为F_1, F_2, F；特征函数为$\varphi_1, \varphi_2, \varphi$；方差为$V_1, V_2, V$．則有

$$\Phi(M)=\int_{R^1}\Phi_1(M-\xi)\Phi_2(d\xi)=\int_{R^1}\Phi_2(M-\xi)\Phi_1(d\xi), \tag{4.13}$$

此处 $$M-\xi=\{\eta-\xi/\eta\in E\},$$

$$F(\xi)=\int_{R^1}F_1(\xi-\eta)dF_2(\eta)=\int_{R^1}F_2(\xi-\eta)dF_1(\eta), \tag{4.14}$$

$$\varphi(z)=\varphi_1(z)\varphi_2(z)\quad\text{（特征函数的可乘性）}, \tag{4.15}$$

$$V=V_1+V_2\quad\text{（方差的可加性）}。 \tag{4.16}$$

为了証明(4.13)，令c_M为M的示性函数，則因随机矢量(x_1, x_2)的分布为$\Phi_1\times\Phi_2$，所以

$$\begin{aligned}\Phi(M)&=E[c_M(x)]=E[c_M(x_1+x_2)]\\&=\int_{R^1}\int_{R^1}c_M(\xi_1+\xi_2)\Phi_1(d\xi_1)\Phi_2(d\xi_2)\\&=\int_{R^1}\Phi_1(M-\xi_2)\Phi_2(d\xi_2).\end{aligned}$$

其他的关系式也可仿此加以証明。姑且脱离随机变数而来考虑任意的两个分布Φ_1, Φ_2，則由(4.13)所定义的Φ也是一个分布，并以$\Phi_1*\Phi_2$来表示，称它为Φ_1和Φ_2的卷积(convolution)。若令Φ_1, Φ_2, Φ的特征函数为$\varphi_1, \varphi_2, \varphi$，則

$$\varphi(z)=\varphi_1(z)\varphi_2(z)\Leftrightarrow\Phi=\Phi_1*\Phi_2. \tag{4.17}$$

若Φ为一分布，定义Φ的負反$\check{\Phi}$如下：

$$\check{\Phi}(M)=\Phi(-M),\quad -M=\{-\xi/\xi\in M\}. \tag{4.18}$$

$\check{\Phi}$的特征函数$\check{\varphi}$即为

$$\check{\varphi}(z)=\overline{\varphi(z)}. \tag{4.19}$$

若 x 的分布为 Φ，则 $-x$ 的分布即为 $\check{\Phi}$. 若 Φ 是 $\{\Phi_i\}$ 的凸組合，则 φ 是同一組系数的 $\{\varphi_i\}$ 的凸組合。由此可知，特征函数全体的集合 C 具有下述的性質：

（i） C 中元素的凸組合仍属于 C，

（ii） $C\ni\varphi_1, \varphi_2\Rightarrow C\ni\varphi_1\cdot\varphi_2$，

（iii） $C\ni\varphi\Rightarrow C\ni\overline{\varphi}$，

因而

（iv） $C\ni\varphi\Rightarrow C\ni|\varphi|^2$.

若令随机变数 x 的特征函数为 $\varphi(z)$，则 $ax+b$ 的特征函数为 $e^{ibz}\varphi(az)$.

今将在 §2 所举的一維分布的例題中，分布的均值 M、方差 V 和特征函数 $\varphi(z)$ 列表如下：

表 4.1

Φ	M	V	$\varphi(z)$
δ分布　$\delta(\cdot;a)$	a	0	e^{iaz}
二項分布　$B(\cdot;p,n)$	np	npq	$(pe^{iz}+q)^n$
Poisson分布　$P(\cdot;\lambda)$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^{iz}-1)\}$
正态分布　$N(\cdot;a,v)$	a	v	$\exp\left\{iaz-\frac{v}{2}z^2\right\}$
Cauchy 分布　$C(\cdot;a,c)$	没有	没有	$\exp\{iaz-c\|z\|\}$

因为 $(pe^{iz}+q)^n\cdot(pe^{iz}+q)^{n'}=(pe^{iz}+q)^{n+n'}$，所以由(4.17)得

$$B(\cdot;p,n)*B(\cdot;p,n')=B(\cdot;p,n+n').$$

同理可得

$$\delta(\cdot;a)*\delta(\cdot;a')=\delta(\cdot;a+a'),$$
$$P(\cdot;\lambda)*P(\cdot;\lambda')=P(\cdot;\lambda+\lambda'),$$
$$N(\cdot;a,v)*N(\cdot;a',v')=N(\cdot;a+a',v+v'),$$
$$C(\cdot;a,c)*C(\cdot;a',c')=C(\cdot;a+a',c+c').$$

又因当 $v\to 0$ 时，$\exp\left\{iaz-\frac{v}{2}z^2\right\}\to e^{iaz}$，所以由 12 頁(ii)得 $N(\cdot;a,v)\to\delta(\cdot;a)$。在这种意义下，δ 分布可以看做正态分布的退化情形。同理 δ 分布又可以看做 Cauchy 分布的退化情形。

上面所得到的結果仍然可以照样推广到 m 維的分布上去。此时，分布函数就由下式所規定：

$$F(\xi_1,\cdots,\xi_m)=\Phi((-\infty,\xi_1]\times(-\infty,\xi_2]\times\cdots\times(-\infty,\xi_m]). \tag{4.20}$$

分布叙列收斂的定义也与一維时相仿。特征函数可由

$$\varphi(z)=\int_{R^m}e^{i(z,\xi)}\Phi(d\xi),\quad (z,\xi)=\sum_{\nu=1}^{m}z_\nu\xi_\nu \tag{4.21}$$

来定义，而其性質就完全与一維的情况相同。均值和方差分别成为均值矢量和方差矩陣。其分量可由

$$\begin{aligned}M_i&=\int_{R^m}\xi_i\Phi(d\xi),\\ V_{ij}&=\int_{R^m}(\xi_i-M_i)(\xi_j-M_j)\Phi(d\xi)\end{aligned} \tag{4.22}$$

給出。若 Φ 是随机矢量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的分布，則上述的 F，φ，M 和 V 分别为

$$F(\xi_1,\cdots,\xi_m)=P\{\omega/x_1(\omega)\leqslant\xi_1,\cdots,x_m(\omega)\leqslant\xi_m\},$$
$$\varphi(z)=E(e^{i(z,x)}),$$
$$M=E(\boldsymbol{x}),\quad V_{ij}=E\{(x_i-E(x_i))(x_j-E(x_j))\}.$$

若就 §2 所举的 m 維分布的例子来求 M，V 和 φ，則可列表如下：

Φ	M	V	φ
$\delta(\cdot;\boldsymbol{a})$	$\boldsymbol{a}$	0	$e^{i(z,\boldsymbol{a})}$
$B(\cdot;\boldsymbol{p},n)$	$n\cdot\boldsymbol{p}$	$V_{\mu\mu}=np_\mu(1-p_\mu)$ $V_{\mu\nu}=-np_\mu p_\nu\ (\mu\neq\nu)$	$(\sum_\nu p_\nu e^{iz_\nu})^n$
$N(\cdot;\boldsymbol{a},V)$	$\boldsymbol{a}$	V	$\exp\left\{i(\boldsymbol{a},z)-\frac{1}{2}(Vz,z)\right\}$

在定义正态分布的时候，假定了 V 是狭义正定对称矩陣。当 V 是广义正定对称时，若令 $V_n=V+I/n$（I 是单位矩陣），則 V_n 成为狭义正定对称，因而可以定义 $N_n=N(\cdot;\boldsymbol{a},V_n)$. 这个分布的特征函数 $\varphi_n(z)$ 可由下式表出：

$$\varphi_n(z)=\exp\left\{i(\boldsymbol{a},z)-\frac{1}{2}(V_nz,z)\right\}=\varphi(z)\exp\left\{-\frac{1}{2n}(z,z)\right\},$$

此处

$$\varphi(z)=\exp\left\{i(\boldsymbol{a},z)-\frac{1}{2}(Vz,z)\right\}.$$

故 $\varphi_n(z)$ 在 z 的任意有界集合上一致收斂于 $\varphi(z)$. 因为 $\varphi_n(z)$ 是 N_n 的特征函数，所以 $\varphi(z)$ 也就是某一分布 N 的特征函数，而且 N 是分布叙列 $\{N_n\}$ 的极限。这个 N 記为正态分布 $N(\cdot;\boldsymbol{a},V)$. 当 V 特别是狭义正定时，这就与上述的定义相一致。若 V 不是狭义正定即 $\det V=0$ 时，那么这个正态分布就叫做**退化的正态分布**。这时，这个分布的負荷者不是整个空間 R^m，而是其中的某些超平面。但即使是在退化的場合，$\boldsymbol{a}$ 和 V 仍然分别是 $N(\cdot;\boldsymbol{a},V)$ 的均值和方差。

最后，就无限維空間 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布，定义其**均值矢量** M，**方差矩陣** V 和**特征函数** $\varphi(z)$. M 和 V 完全与 m 維的場合的定义相同。关于特征函数就与以前稍有不同的地方。在 m 維的情况下，z 也是 m 維的任意矢量，但在无限維 (R^A) 的情况下，z 就只取

几乎所有的(即除有限个例外的意思)坐标为 0 的 R^A 的元素。令这样的点的全体为 R_0^A。当 $z\in R_0^A$，$\xi\in R^A$ 时，就可以定义 $(z,\xi)=\sum_\alpha z_\alpha\xi_\alpha$。因为右边实际上是有限和，所以不会发生收敛与否的問题。对于 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的分布 P，其特征函数 $\varphi(z)$ 就定义为

$$\varphi(z)=\int_{R^A}e^{i(z,\xi)}P(d\xi),\ z\in R_0^A.$$

在 $\varphi(z)$ 中留下某些有限个坐标，然后剩下的都令为 0，就得 $\varphi(z)$ 的**截口**(section)。P 的特性函数的截口就是 P 的射影 (2.12) 的特性函数。据此，**Kolmogoroff 定理**可以改述如下：

若 $z\in R_0^A$ 的函数 $\varphi(z)$ 的任意截口是特性函数，则 $\varphi(z)$ 是 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的某个分布的特性函数。并且这分布是唯一决定的。

利用这点，就可以定义**无限維的正态分布**。令 M 为 R^A 的任意的元素，V 为 $R^{A\times A}$ 的元素，并且滿足

$$V_{\alpha\beta}=V_{\beta\alpha},\quad (V_{\alpha\beta}\text{ 为 }V\text{ 的坐标})$$

$$(Vz,z)=\sum_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}z_\alpha z_\beta\geqslant 0\quad(z\in R_0^A).$$

(注意右边实质上也是有限和)。若令

$$\varphi(z)=\exp\left\{i(z,M)-\frac{1}{2}(Vz,z)\right\},$$

由于 $\varphi(z)$ 的任意截口是正态分布(包含退化的情形)的特征函数，因而由上面改述的 Kolmogoroff 定理，$\varphi(z)$ 可以定出 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 的分布。这分布叫做 R^A 上的正态分布 $N(\cdot;M,V)$。因为这分布在 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 上的射影对应于 $\varphi(z)$ 在 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 上的截口，故得 $N(\cdot;(M_{\alpha_i}),(V_{\alpha_i\alpha_j}))$。由此容易知道，$M$ 和 V 分别是这分布的均値和方差。

§5 随机过程

随机过程(stochastic process, random process) 是把随时間

变动的偶然量抽象起来的概念。从测度論观点下的概率論来看，就可这样来定义：令 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 为基本的概率空間，T 为实数的集合。对应于 T 的元素 t 的随机变数 $x_t(\omega)$ 所成的族就叫做随机过程。从应用上来說，t 表示时間，而 $x_t(\omega)$ 就表示該偶然量在时間 t 的值。至于 T 的取法，既可以是 $\{1, 2, 3, \cdots\}$，$\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 这样的离散集合，又可以是区間 $(0, \infty)$，$(-\infty, \infty)$，(a, b) 这样的連續集合。前者的情形特别叫做**随机叙列**(random sequence)。

随机过程 $x_t(\omega)$，$t\in T$，又可以考虑为无限維的随机矢量 $x(\omega)=\prod_t x_t(\omega)$。$x(\omega)$ 虽是取值于 $R^T(\boldsymbol{B}^T)$ 内的随机矢量，但因 R^T 的元素是定义于 T 上的实函数，所以对于每一 ω 就有一个这样的函数与之对应。在这种意义下，随机过程有时也叫做**随机函数**(random function)。对于与 ω 对应的 t 的函数叫做**样本函数**(sample function)或者样本过程(sample process)。因为随机过程是取值于 $R^T(\boldsymbol{B}^T)$ 内的随机矢量，所以其分布就为 $R^T(\boldsymbol{B}^T)$ 上的概率分布。若其为正态分布，就叫做**正态过程**(normal stochastic process)。

若 $x_t(\omega)$ 是取复数值的 ω 的可测函数，则 $x_t(\omega)$，$t\in T$，叫做复随机过程。至于把正态过程推广到复随机过程的場合，将在 §27 中討論。

第2章 可加过程

§6 可加过程的定义

可加过程(additive process, differential process)是这样的随机过程，当时間变动时，它将加上独立的增量。詳細地来說，随机过程 $x_t(\omega)$，$a\leqslant t<b$，$(-\infty<a<b\leqslant\infty)$，叫做可加过程，如果满足：

(i) $x_a(\omega)\equiv 0$，

(ii) 对 $a\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n<b$，

$$x_{t_i}-x_{t_{i-1}},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \text{是独立的。}$$

同样又可以定义**可加叙列**(additive sequence) $x_n(\omega)$，$n=0$，1，2，…，这时代替(ii)的是 $y_n=x_n-x_{n-1}$，$n=1$，2，… 为独立的。

下述的构成定理是討論可加叙列的基础。

定理 1 对任意的一維分布叙列 Φ_1，Φ_2，…，都可以在适当的概率空間上定义可加叙列 $\{x_n\}$，使得 x_n-x_{n-1} 的分布为 Φ_n。

証明 假使已經得到了所求的 x_n，那么，$y_n=x_n-x_{n-1}$，$n=1$，2，…，就是独立的，且以 Φ_n 为其分布。故无限維随机矢量 $\boldsymbol{y}(\omega)=\prod_i y_i(\omega)$ 的分布就是 Φ_n，$n=1$，2，…的直积分布。由此可見，定理可以这样来証明：設 $T=\{1,2,\cdots\}$，$\Omega=R^T$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^T$，$P=\prod_n\Phi_n$，又对 $\omega\in\Omega$ 設

$$y_n(\omega)=p_n(\omega),\quad x_n(\omega)=\sum_1^n y_\nu(\omega),\tag{6.1}$$

则 $\{x_n\}$ 就是所求的叙列。

下面是关于可加过程的一个相应的定理。令 x_t，$a\leqslant t<b$，为可加过程，Φ_{st} 为 $x_t-x_s\,(s<t)$ 的分布。因为当 $s<t<u$ 时，x_u-x_s 是独立随机变数 x_t-x_s 和 x_u-x_t 的和，所以

$$\Phi_{su}=\Phi_{st}*\Phi_{tu}\quad(s<t<u).\tag{6.2}$$

定理 2　若 Φ_{st}, $a \leqslant t < b$, 为满足(6.2)的分布系列，則可以在适当的概率空間上确定可加过程 x_t, $a \leqslant t < b$, 使得 $x_t - x_s$ 的分布为 Φ_{st}。

証明　为了摸到构造出 x_t 的綫索，假設已經得到了 x_t，而去求随机矢量 $\boldsymbol{x}(\omega) = \prod_t x_t(\omega)$ 的分布的特征函数 φ。設 $T = [a, b)$。对 $z \in R_0^T$，

$$\varphi(z) = E(e^{i(z, x)}). \tag{6.3}$$

特别是当 z 的坐标除 $z_{t_1}, z_{t_2}, \cdots, z_{t_n}$ $(t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$ 以外为 0 时，

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= E(e^{i\sum_\nu z_{t_\nu} x_{t_\nu}}) \\ &= E(e^{i\sum_\nu z'_\nu (x_{t_\nu} - x_{t_{\nu-1}})}) \quad \left(z'_\nu = \sum_{i=\nu}^n z_{t_i},\ t_0 = 0 \right),\end{aligned}$$

由 $\{x_{t_\nu} - x_{t_{\nu-1}}\}$ 的独立性可知上式等于

$$\prod_\nu \varphi_{t_{\nu-1} t_\nu}(z'_\nu) \quad (\varphi_{st} = \Phi_{st} \text{ 的特征函数}),$$

因而

$$\varphi(z) = \prod_\nu \varphi_{t_{\nu-1} t_\nu}(z_{t_\nu} + z_{t_{\nu+1}} + \cdots + z_{t_n}). \tag{6.4}$$

这样一来，就知道了定义 $\boldsymbol{x}(\omega)$ 的分布的方法，由此就可将定理証明如下：对 $z \in R_0^T$，按照(6.4)来定义 $\varphi(z)$。在这里必须注意的是这样的一点："在 $z_{t_1}, z_{t_2}, \cdots, z_{t_n}$ 中譬如 z_{t_ν} 等于 0 时，$\varphi(z)$ 虽然也可以由 $\varphi_{t_0 t_1}, \varphi_{t_1 t_2}, \cdots, \varphi_{t_{\nu-2} t_{\nu-1}} \varphi_{t_{\nu-1} t_{\nu+1}} \varphi_{t_{\nu+1} t_{\nu+2}} \cdots \varphi_{t_{n-1} t_n}$ 来定义，但要証明它与(6.4)的右边一致，$\varphi(z)$ 的定义才能肯定。"为此，只要証明 $\varphi_{t_{\nu-1} t_{\nu+1}}(z) = \varphi_{t_{\nu-1} t_\nu}(z) \varphi_{t_\nu t_{\nu+1}}(z)$ 就够了，而由(6.2)的这一假設卽知此事必然成立。在下面将証明，把(6.4)的右边看做 $z_{t_1}, \cdots, z_{t_n}$ 的函数时，那就是某个 n 維分布的特征函数。为此，考虑使得直积分布 $\prod_\nu \Phi_{t_{\nu-1} t_\nu}$ 分布于 $R^n(\boldsymbol{B}^n)$ 上的概率空間 $\Omega'(\boldsymbol{B}', P')$，且在其上設 $y'_\nu(\omega') = p_\nu(\omega')$ 时，則其分布为 $\Phi_{t_{\nu-1} t_\nu}$，并且这些随机变数都是独立的。因此，若設 $x'_\nu(\omega') = \sum_1^\nu y'_i(\omega')$，且令随机矢量 $\boldsymbol{x}'(\omega') = \prod_\nu x'_\nu(\omega')$ 的分布的特征函数为 $\varphi'(z_1, z_2, \cdots, z_n)$，則知道(6.4)的

右边等于 $\varphi'(z_{t_1}, z_{t_2}, \cdots, z_{t_n})$. 故由 Kolmogoroff 定理(变形),得 $\varphi(z)$ 是 $R^T(\boldsymbol{B}^T)$ 上的某个分布(P)的特征函数。若設 $\Omega=R^T$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^T$, 則 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 是基本的概率空間,又若对 $\omega\in\Omega$, 定义 $x_t(\omega)=p_t(\omega)$, 則 $\{x_t\}$ 就是所求的可加过程。

§7 可加过程的例子

設反复地擲一錢币,令 $x_n(x_0=0)$ 为到第 n 次为止擲出正面的次数,若設 $y_1=x_1$, $y_2=x_2-x_1$, $y_3=x_3-x_2$, $\cdots$, 則 y_n 随着第 n 次擲出正面或者反面而取 1 或 0. 因此, y_n 的分布 Φ_n 都是在 0,1 之上各分布为 1/2 的純粹不連續分布。并且 $\{y_n\}$ 是独立的随机变数叙列。故 $\{x_n\}$ 是可加叙列,而其数学模型就可由前节的定理 1 来构成。

下面来考虑随机游动(random walk)的問題。假設一酒醉者从貫通着东西的馬路上的一点出发,他一步一步地向东或者向西跑,这完全是偶然选擇的,設他在走了 n 步后所处的位置为 x_n(在出发点的东边为正,西边为負)。若設 $y_1=x_1$, $y_2=x_2-x_1$, $\cdots$, 則 y_n 随着第 n 步向东跑或者向西跑而取 ±1, 并且它們的概率分别为 1/2, 也就是說, y_n 的分布 Φ_n 就是 $\Phi_n(\pm1)=1/2$ 的純粹不連續分布。又因 $\{y_n\}$ 可以考虑为独立随机变数叙列,所以 $\{x_n\}$ 是可加叙列,而这也可由前节的定理 1 来构成。

其次,以 **Poisson 过程** (Poisson process) 作为可加过程的例子。Poisson 过程 x_t, $0\leqslant t<\infty$, 是一可加过程,而且 $x_t-x_s\,(t>s)$ 的分布 Φ_{st} 就等于 Poisson 分布 $P(\cdot;\lambda(t-s))$. 此处 λ 是正的常数。因为 Φ_{st} 滿足前节的定理 2 的条件(6.3)(見§4),所以可以利用这个定理。当 $h\to0$ 时,由 Poisson 分布的定义就立即知道

$$P\{\omega/x_{t+h}-x_t\geqslant1\}\approx P\{\omega/x_{t+h}-x_t=1\}\sim\lambda\cdot h.$$

假設某些現象在各个瞬間独立地发生或不发生,而且令其在

$(t, t+dt)$之間发生的概率为$\lambda \cdot dt$. 这时在$[0, t]$之間发生的次数x_t可以看做 Poisson 过程[1]。

作为可加过程的另外的一个例子，可以举出 **Wiener** 过程 (Wiener process)。这其实是随机游动問題的一种連續情形。它可用一个可加过程x_t, $0 \leqslant t < \infty$,来定义,使得$x_t - x_s$的分布Φ_{st}是正态分布$N(\cdot; 0, t-s)$. 因为Φ_{st}也满足前节定理2的条件(6.2)(見§4),所以可以利用这个定理。

若x_t是可加过程，則$\alpha x_t + \beta t + \gamma$也是可加过程。又若$x_t$, $a \leqslant t < b$和y_t, $a \leqslant t < b$都是可加过程,并且随机矢量$\boldsymbol{x} = \prod_t x_t$和$\boldsymbol{y} = \prod_t y_t$是独立的(也可以这样說,"若对任意的$t_1, t_2, \cdots, t_n$, n維随机矢量$\prod_i x_{t_i}$和$\prod_i y_{t_i}$是独立的"),則$\alpha x_t + \beta y_t$, $a \leqslant t < b$也是可加过程。对于二个以上的可加过程来説这一結論也成立。利用这个事实,由 Poisson 过程和 Wiener 过程出发,就可以构成更一般的可加过程(見§17)。

§8 关于独立随机变数之和的不等式

定理 1 (Kolmogoroff 不等式) 設$x_1, x_2, \cdots, x_n$为独立，且

$$E(x_i) = 0, \quad V(x_i) < \infty, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{8.1}$$

則

$$P\left\{\omega \Big/ \max_{k=1}^{n} |x_1 + \cdots + x_k| \geqslant c\right\} \leqslant \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} V(x_k). \tag{8.2}$$

証明 設$A_k = \{\omega / |x_1|, |x_1 + x_2|, \cdots, |x_1 + \cdots + x_{k-1}| < c, |x_1 + \cdots + x_k| \geqslant c\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 并令$A_k$的示性函数为$a_k(\omega)$. $a_k(\omega)$关于$x_1, x_2, \cdots, x_k$是可測的。由A_k的定义,可知$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相交,于是(8.2)的左边等于

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum P(A_k).$$

[1] 这一結論的一个簡单証明,可参見复旦大学数学系郑紹濂等編:概率論与数理統計,上海科学技术出版社,1961,§6中之例7.——校者注

由 $E(x_i)=0$，得

$$V(x_1+\cdots+x_n)=E((x_1+\cdots+x_n)^2),$$

又因 $\sum a_k\leqslant 1$，所以上式 $\geqslant \sum_k E(a_k(x_1+\cdots+x_n)^2)$。

但因

$$E(a_k(x_1+\cdots+x_n)^2)=E(a_k(x_1+\cdots+x_k)^2)$$
$$+2E(a_k(x_1+\cdots+x_k)(x_{k+1}+\cdots+x_n))+E(a_k(x_{k+1}+\cdots+x_n)^2).$$

由 a_k 的定义可知第1项 $\geqslant c^2P(A_k)$。因 $a_k(x_1+\cdots+x_k)$ 和 $(x_{k+1}+\cdots+x_n)$ 分别关于 $(x_1,\cdots,x_k)$ 和 $(x_{k+1},\cdots,x_n)$ 是可测的，所以这些随机变数是独立的，并且 $E(x_{k+1}+\cdots+x_n)=0$。故第2项为0，第3项 $\geqslant 0$。因此，上式 $\geqslant c^2P(A_k)$，于是

$$V(x_1+\cdots+x_n)\geqslant c^2\sum P(A_k).$$

又由 $\{x_k\}$ 的独立性可知左边 $=\sum V(x_k)$。綜合以上所述就得(8.2)。

定理2 (Ottaviani 不等式)　若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为独立，并且

$$P\{\omega/|x_{k+1}+\cdots+x_n|\leqslant c\}\geqslant 1/2,\quad k=0,1,\cdots,n-1, \tag{8.3}$$

则

$$P\left\{\omega\Big/\max_{k=1}^{n}|x_1+\cdots+x_k|>2c\right\}\leqslant 2P\{\omega/|x_1+\cdots+x_n|>c\}. \tag{8.4}$$

証明　若令

$$A_k=\{\omega/|x_1|,|x_1+x_2|,\cdots,|x_1+\cdots+x_{k-1}|\leqslant 2c,$$
$$|x_1+\cdots+x_k|>2c\},\ 1\leqslant k\leqslant n,$$

$$B_k=\{\omega/|x_{k+1}+\cdots+x_n|\leqslant c\},\ 1\leqslant k\leqslant n-1,$$

则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相交，于是(8.4)的左边的 ω 集合等于 $A_1+A_2+\cdots+A_n$。因由 $|x_1+\cdots+x_k|>2c$，$|x_{k+1}+\cdots+x_n|\leqslant c$ 可以得出 $|x_1+\cdots+x_n|>c$，所以若令(8.4)右边的 ω 集合为 C，则得

$$A_1\cdot B_1+A_2\cdot B_2+\cdots+A_n\cdot B_n\subseteq C,\text{ 此处 } B_n=\Omega.$$

因为 A_k 由形状为 $(x_1,\cdots,x_k)\in E$ 的条件而定，B_k 由形状为

$(x_{k+1}, \cdots, x_n)\in E'$的条件而定，又因$(x_1, \cdots, x_k)$和$(x_{k+1}, \cdots, x_n)$是独立的，于是$P(A_kB_k)=P(A_k)P(B_k)$．由(8.3)得$P(B_k)\geqslant 1/2$．故$P(A_kB_k)\geqslant P(A_k)/2$．因此

$$P(C)\geqslant P(A_1B_1)+P(A_2B_2)+\cdots+P(A_nB_n)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n))$$

故

$$P(C)\geqslant\frac{1}{2}P(A_1+A_2+\cdots+A_n).$$

§9　0-1律

当ω集合A的示性函数$a(\omega)$关于随机矢量$\boldsymbol{x}(\omega)=\prod_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda(\omega)$为可测时，就称$A$关于$\boldsymbol{x}(\omega)$（或关于$x_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$）是可测的。令λ为Λ的任意元素，ξ为任意的实数，考虑所有形状为$\{\omega/x_\lambda\leqslant\xi\}$的$\omega$集合，而把包含这集合的最小Borel集合体記为$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$或者$\boldsymbol{B}(x_\lambda, \lambda\in\Lambda)$．“$A$关于$\boldsymbol{x}(\omega)$可测”就等价于$A$是$\boldsymbol{B}(x)$的元素。换言之，$A$是形状为$\{\omega/\boldsymbol{x}(\omega)\in E\}$, $E\in\boldsymbol{B}^\Lambda$, 的集合。此时，对于任意的$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\in\Lambda$及$E\in\boldsymbol{B}^n$来說，$\{\omega/(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \cdots, x_{\lambda_n})\in E\}$关于$\boldsymbol{x}$是可测的。又若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \in\Lambda$，則使得$x_{\lambda_n}(\omega), n=1,2,\cdots$，收斂的$\omega$全体的集合关于$\boldsymbol{x}$也是可测的。

引理1　令A关于x_λ, $\lambda\in\Lambda$, 为可测。則对于任意的$\varepsilon>0$，可在Λ中找出有限个元素，例如$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 及存在关于$x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \cdots, x_{\lambda_n}$为可测的集合$A_\varepsilon$，使得

$$P(A-A_\varepsilon)+P(A_\varepsilon-A)<\varepsilon。\tag{9.1}$$

証明　因为具有上述性质的A全体是一Borel集合体。此外，具有形状为$\{\omega/x_\lambda\leqslant\xi\}$的集合具有这种性质，所以$\boldsymbol{B}(x)$中的元素都具有这种性质。

称$\boldsymbol{A}_\lambda, \lambda\in\Lambda$，是**独立的**，意指其示性函数的集合$a_\lambda(\omega), \lambda\in\Lambda$,

构成独立随机变数系。

引理 2 若 $A_1, A_2, \cdots$（有限个或者可数无限个）是独立的，则

$$P(\bigcap_n A'_n) = \prod_n P(A'_n), \quad \text{此处 } A'_n = A_n \text{ 或者 } A^c_n. \tag{9.2}$$

引理 3 令 $x_\lambda(\omega), \lambda \in \Lambda$，为独立随机矢量系，若对各个 $\lambda \in \Lambda$，A_λ 分别关于 $x_\lambda(\omega)$ 为可测时，则 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$，是独立的。

定理 1 (Kolmogoroff 的 0–1 律) 設 $x_1, x_2, \cdots$ 是独立的，且若对任意的 n 来說，A 关于 $x_n, x_{n+1}, \cdots$ 为可测，则

$$P(A) = 0 \text{ 或者 } 1. \tag{9.3}$$

証明 因为 A 关于 $x_1, x_2, \cdots$ 是可测的，所以对于 ε，取足够大的 n，就在(9.1)的意义下，可用关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为可测的 A_ε 来逼近 A。因为 A 关于 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ 也是可测的，所以由$\{x_n\}$的独立性可知 A 和 A_ε 是相互独立的（引理 3）。故 $P(A \cdot A_\varepsilon) = P(A)P(A_\varepsilon)$。由(9.1)得

$$|P(A) - P(A_\varepsilon)| < \varepsilon, \quad |P(A) - P(A \cdot A_\varepsilon)| < \varepsilon.$$

因此，令 $\varepsilon \to 0$ 便得 $P(A) = P(A)^2$，卽 $P(A) = 0$ 或者 1。

应用定理 1，就可以証明：若 $x_1, x_2, \cdots$ 为独立，则

$$P\{\omega / \sum x_n \text{ 收斂}\} = 0 \text{ 或者 } 1,$$

$$P\left\{\omega \Big/ \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \to 0\right\} = 0 \text{ 或者 } 1.$$

定理 2 (Borel-Cantelli 的定理) 若事件敍列$\{A_n\}$满足

$$\sum P(A_n) < \infty, \tag{9.4}$$

则

$$P(\overline{\lim}\, A_n) = 0, \quad P(\underline{\lim}\, A^c_n) = 1. \tag{9.5}$$

若$\{A_n\}$是独立的，而且

$$\sum P(A_n) = \infty, \tag{9.6}$$

则

$$P(\overline{\lim}\, A_n) = 1, \quad P(\underline{\lim}\, A^c_n) = 0. \tag{9.7}$$

証明　若假定(9.4)成立，則

$$P(\overline{\lim}\, A_n)=P(\bigcap_k\bigcup_{n\geqslant k}A_n)\leqslant P(\bigcup_{n\geqslant k}A_n)\leqslant\sum_{n\geqslant k}P(A_n)\to 0.$$

故(9.5)的第一式即被証明。利用 $\underline{\lim}\, A_n^c=(\overline{\lim}\, A_n)^c$，第二式就可由第1式导出。

其次令$\{A_n\}$是独立的，且令(9.6)成立。

$$P(\underline{\lim}\, A_n^c)=P(\bigcup_k\bigcap_{n\geqslant k}A_n^c)\leqslant\sum_k P(\bigcap_{n\geqslant k}A_n^c).$$

由引理2，

$$P(\bigcap_{n\geqslant k}A_n^c)=\prod_{n\geqslant k}P(A_n^c)=\prod_{n\geqslant k}(1-P(A_n)).$$

因由(9.6)得$\sum_{n\geqslant k}P(A_n)=\infty$，所以上面的无穷乘积为0，于是$P(\underline{\lim}\, A_n^c)$也为0. 因而$P(\overline{\lim}\, A_n)=1$.

§10　可加叙列的收斂

令x_n，$n=0, 1, 2, \cdots$，为可加叙列。若設$y_n=x_n-x_{n-1}$，則$\{y_n\}$是独立的随机变数叙列。本节的目的是来考察当$n\to\infty$时x_n的收斂条件。若以C表示使$x_n(\omega)$，$n=0,1,2,\cdots$收斂的ω集合，則得

$$C=\bigcap_p\bigcup_k\bigcap_{m,n>k}\{\omega/|x_m(\omega)-x_n(\omega)|<1/p\}$$
$$=\bigcap_p\bigcup_k\bigcap_{m,n>k}\{\omega/|y_{n+1}(\omega)+\cdots+y_m(\omega)|<1/p\}.$$

故C关于$y_1, y_2, \cdots$是可測的。因为$x_n(\omega)$，$n\geqslant 0$，的收斂等价于$x_n(\omega)-x_N(\omega)$，$n\geqslant N$，的收斂，所以也可以写成

$$C=\bigcap_p\bigcup_{k\geqslant N}\bigcap_{m,n>k}\{\omega/|y_{n+1}(\omega)+\cdots+y_m(\omega)|<1/p\},$$

而C又可以說是关于$y_{N+1}, y_{N+2}, \cdots$是可測的。故由 Kolmogoroff 的0–1律，就得

$$P(C)=0\text{ 或者 }1. \tag{10.1}$$

那末在什么样的条件下，$P(C)$才为1呢？首先叙述充分条件。

定理 1 若$\{E(x_n)\}$与$\{V(x_n)\}$同时收斂，则$P(C)=1$，也就是說，x_n 几乎处处收斂。

証明 由于$x_n=(x_n-E(x_n))+E(x_n)$，$V(x_n)=V(x_n-E(x_n))$，因而設 $E(x_n)=0$ 也不会丧失普遍性。因为

$$\sum_1^{\infty} V(y_n)=\lim_{n\to\infty} V(x_n)<\infty,$$

所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $n(\varepsilon)$，而且就 $n\geqslant n(\varepsilon)$ 而論，总会使得

$$\sum_n^{\infty} V(y_n)<\varepsilon.$$

根据 Kolmogoroff 的不等式，得

$$P\{\omega/\max_{1\leqslant k\leqslant m}|y_{n+1}+\cdots+y_{n+k}|>a\}\leqslant\varepsilon/a^2.$$

令 $m\to\infty$ 便得

$$P\{\omega/\sup_k|y_{n+1}+\cdots+y_{n+k}|>a\}\leqslant\varepsilon/a^2.$$

因为 $|y_{n+k}+\cdots+y_{n+l}|\leqslant|y_{n+1}+\cdots+y_{n+k-1}|+|y_{n+1}+\cdots+y_{n+l}|$ $(k<l)$，所以由上式得出

$$P\{\omega/\sup_{l>k}|y_{n+k}+\cdots+y_{n+l}|>2a\}\leqslant\varepsilon/a^2 \qquad (n\geqslant n(\varepsilon)),$$

令 $n\to\infty$ 就得

$$P\{\omega/\lim_{n\to\infty}\sup_{l>k}|y_{n+k}+\cdots+y_{n+l}|>2a\}\leqslant\varepsilon/a^2,$$

先令 $\varepsilon\to0$，而后再令 $a\to0$ 就得

$$P\{\omega/\lim_{n\to\infty}\sup_{l>k}|y_{n+k}+\cdots+y_{n+l}|>0\}=0.$$

这就說明了 C 的余集的 P–测度为 0。

下述定理說明了几乎处处收斂的必要而且充分条件。

定理 2 (三級数的定理) 若設 $y'_n(\omega)=y_n(\omega)$ $(|y_n(\omega)|\leqslant1)$，$=0$ $(|y_n(\omega)|>1)$，則 x_n 几乎处处收斂的必要而且充分条件是下面的三个級数都收斂：

$$\sum E(y'_n),\quad \sum V(y'_n),\quad \sum P\{\omega/y_n\neq y'_n\}. \qquad (10.2)$$

証明 充分性：由于前 2 級数的收斂性，故而根据前一定理

可知 $\sum y_n'$ 是几乎处处收斂的。由于第 3 級数的收斂性，而且根据 Borel-Cantelli 的定理，可知在某些号数以后 $y_n(\omega)=y_n'(\omega)$ 的概率为 1. 故由 y_n' 的几乎处处收斂性，而得出 y_n 是几乎处处收斂的。

必要性：若設 $\sum P\{\omega/y_n\neq y_n'\}=\infty$，則根据 Borel-Cantelli 的定理，可知对无限多个 n，$y_n(\omega)\neq y_n'(\omega)$ 的概率就是 1. 因为 $y_n\neq y_n'$ 等价于 $|y_n|>1$，所以无限多个 y_n 的絕对值大于 1 的概率也是 1. 故 $\sum y_n$ 发散的概率就为 1. 所以为了使 $\sum y_n$ 即 x_n 几乎处处收斂，就需要 $\sum P\{\omega/y_n\neq y_n'\}<\infty$. 若这式成立，則再一次根据 Borel-Cantelli 的定理，可知由 $\sum y_n$ 的几乎处处收斂性就会得出 $\sum y_n'$ 的几乎处处收斂性。现在令 y_n' 的分布为 Φ_n，而令 $\Phi_n(-x)$ 的負反分布为 $\check{\Phi}_n(x)$，又令 $\Phi_n*\check{\Phi}_n$ 为 $\tilde{\Phi}_n$. 因为 Φ_n 的負荷者为 $[-1, 1]$，所以 $\tilde{\Phi}_n$ 的負荷者就为 $[-2, 2]$. 显然有

$$M(\tilde{\Phi}_n)=0,\ V(\tilde{\Phi}_n)=2V(\Phi_n)=2V(y_n').$$

若令 Φ_n 的特征函数为 $\varphi_n(z)$，則 $\tilde{\Phi}_n$ 的特征函数就为 $|\varphi_n(z)|^2$. 如上面所証，因为 $\sum y_n'$ 是几乎处处收斂的，所以

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{iz(y_1'+\cdots+y_n')})=E(e^{izx_\infty}),\ x_\infty=\sum y_n=\lim x_n,$$

因此，$\prod_n \varphi_n(z)$ 在 $z=0$ 的某些邻域 $(|z|<a)$ 上不为 0. 故 $\prod_n |\varphi_n(z)|^2>0\ (|z|<a)$，由此得出

$$\sum_n(1-|\varphi_n(z)|^2)<\infty,$$

也就是

$$\sum_n\int(1-\cos z\xi)\tilde{\Phi}_n(d\xi)<\infty.$$

因为对足够小的 ξ 来說，有 $1-\cos\xi>\xi^2/3$，所以若令 z 为足够小的正数(注意 $\tilde{\Phi}_n$ 的負荷者是 $[-2, 2]$)，則得

$$\sum_n\int\frac{z^2\xi^2}{3}\tilde{\Phi}_n(d\xi)<\infty.$$

由此可知 $\sum V(\tilde{\Phi}_n)$ 为收斂，从而 $\sum V(y_n')$ 是收斂的。故由定理 1

可知 $\sum_n (y'_n - E(y'_n))$ 为几乎处处收斂。但因 $\sum_n y'_n$ 由假設是几乎处处收斂的，所以知 $\sum_n E(y'_n)$ 亦为收斂的。

定理3 下述的三个条件是等价的：

(i) x_n 的分布收斂，

(ii) x_n 依概率收斂，

(iii) x_n 几乎处处收斂。

証明 (iii)⇒(ii)⇒(i)是显然的。先証(i)⇒(ii)。若令 y_n 的分布为 Φ_n，其特征函数为 φ_n，则由(i)知 $\Phi_1 * \Phi_2 * \cdots * \Phi_n$ 当 $n \to \infty$ 时收斂于某一分布 Φ。若令 Φ 的特征函数为 φ 时，则 $|\varphi(z)|$ 在 $z=0$ 的某些邻域 $|z| \leqslant a$ 上大于某一正数 b。又因 $\varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \cdot \cdots$ 广义地一致收斂于 $\varphi(z)$，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，可以定出 $N(\varepsilon)$，使得

$$m > n > N(\varepsilon) \Rightarrow |\varphi_{n+1}(z) \cdot \varphi_{n+2}(z) \cdots \varphi_m(z) - 1| < \varepsilon \quad (|z| \leqslant a).$$

現在若置 $\theta(z) = \varphi_{n+1}(z) \cdots \varphi_m(z)$，且令对应于 $\theta(z)$ 的分布即 $x_m - x_n$ 的分布为 Θ，則当 $m > n > N(\varepsilon)$ 时就有

$$|\Theta(z) - 1| < \varepsilon \quad (|z| \leqslant a),$$

故

$$\left| \int (1 - e^{izx}) \Theta(dx) \right| < \varepsilon.$$

若从 $-a$ 到 a 对 z 积分，然后再除以 $2a$，則得

$$\int \left(1 - \frac{\sin xa}{xa}\right) \Theta(dx) < \varepsilon.$$

然因存在常数 $C > 0$，使得

$$1 - \frac{\sin x}{x} \geqslant C \frac{x^2}{1+x^2},$$

所以

$$\int \frac{x^2 a^2}{1 + x^2 a^2} \Theta(dx) < \frac{\varepsilon}{C},$$

因而

$$\int_{|x| > \eta} \Theta(dx) < \frac{(1 + \eta^2 a^2)\varepsilon}{C \eta^2 a^2},$$

綜上所述，当 $m>n>N(\varepsilon)$ 时，有

$$P\{\omega/|x_m-x_n|\geqslant\eta\}<(1+\eta^2a^2)\varepsilon/C\eta^2a^2.$$

这就説明了 x_n 是依概率收斂的。剩下的就是証明 (ii)⇒(iii)，但这与定理1的証明方法相似。只要以 Ottaviani 的不等式来代替 Kolmogoroff 的不等式就行了。

§11　散　布　度

如前面所述，方差是表示分布散布程度的标志，但因方差不一定存在，所以它的运用范圍就有所限制。因此引进散布度这样一个概念。散布度对所有的分布都存在而且起着与方差同样的作用。对一維分布 Φ，就称下式中的 $\delta(\Phi)$ 为 Φ 的**散布度**：

$$\delta(\Phi)=-\log\left[\iint e^{-|x-y|}\Phi(dx)\Phi(dy)\right]. \tag{11.1}$$

再把上式的括号里的二重积分的值表示为 $q(\Phi)$，并称它为 Φ 的**集中度**。对随机变数 x，也可将 $\delta(x)$ 和 $q(x)$ 分别定义为由 x 的分布 Φ 所决定的 $\delta(\Phi)$ 和 $q(\Phi)$. 由定义立即知道：

(i) $0<q(\Phi)\leqslant1$, $0\leqslant\delta(\Phi)<\infty$,

(ii) $q(x)=q(x+a)=q(-x)$, $\delta(x)=\delta(x+a)=\delta(-x)$,

(iii) $q(\Phi)=1\Leftrightarrow\delta(\Phi)=0\Leftrightarrow\Phi$ 是 δ 分布,

(iv) $\delta(x_n)\to0\Leftrightarrow$ 存在 $\{a_n\}$，使得 x_n-a_n 依概率收斂于 0.

証明　⇐是显然的。往証⇒. 由 $\delta(x_n)\to0$ 得出

$$\iint e^{-|x-y|}\Phi_n(dx)\Phi_n(dy)\to1\quad(\Phi_n\text{ 是 }x_n\text{ 的分布})。$$

故存在 $\{a_n\}$ 使得

$$\int e^{-|x-a_n|}\Phi_n(dx)\to1,$$

也就是

$$\int(1-e^{-|x-a_n|})\Phi_n(dx)\to0,$$

故得

$$\int_{|x-a_n|>\varepsilon}\Phi_n(dx)\leqslant\frac{1}{1-e^{-\varepsilon}}\int(1-e^{-|x-a_n|})\Phi_n(dx)\to 0.$$

(v) $\delta(x_n)\to\infty\Leftrightarrow$对所有的 l, $Q_n(l)\equiv\sup\limits_a\Phi_n[a-l,a+l]\to 0$.

証明 若令 $\delta(x_n)\to\infty$, 则 $q(x_n)\to 0$.

$$\Phi_n[a-l,\ a+l]^2=\iint_{|x-a|,|y-a|<l}\Phi_n(dx)\Phi_n(dy)\leqslant\iint_{|x-y|<2l}\Phi_n(dx)\Phi_n(dy)$$

$$\leqslant e^l q(x_n),$$

故得

$$Q_n(l)\leqslant e^{l/2}q(x_n)^{1/2}\to 0.$$

反之,对所有的 l, 令 $Q_n(l)\to 0$.

$$\int e^{-|x-y|}\Phi_n(dx)\leqslant\int_{|x-y|>l}''+\int_{|x-y|<l}''\leqslant e^{-l}+Q_n(l),$$

$$q(x_n)=\iint e^{-|x-y|}\Phi_n(dx)\Phi_n(dy)\leqslant e^{-l}+Q_n(l).$$

若取 l 足够大, 使 $e^{-l}<\varepsilon/2$, 再取 n 足够大使 $Q_n(l)<\varepsilon/2$, 则得 $q(x_n)<\varepsilon$, 因而 $q(x_n)\to 0$. 故 $\delta(x_n)\to\infty$.

(vi) 若令 φ 为 Φ 的特征函数,则

$$q(\Phi)=\frac{1}{\pi}\int\frac{|\varphi(z)|^2}{1+z^2}dz.$$

因此,若 $\Phi_n\to\Phi$, 则 $q(\Phi_n)\to q(\Phi)$, 也就是 $\delta(\Phi_n)\to\delta(\Phi)$. 同理, 若 $x_n\to x$ (依概率收敛),则 $\delta(x_n)\to\delta(x)$.

証明 若令 $\Psi=\check{\Phi}$(Φ 的負反),则 $\Phi*\Psi$ 的特征函数为 $|\varphi(z)|^2$.

$$q(\Phi)=\iint e^{-|x-y|}\Phi(dx)\Phi(dy)=\iint e^{-|x+y|}\Phi(dx)\Psi(dy)$$

$$=\int e^{-|x|}(\Phi*\Psi)(dx)=\int\frac{1}{\pi}\int\frac{e^{izx}}{1+z^2}dz(\Phi*\Psi)(dx)$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint e^{izx}(\Phi*\Psi)(dx)\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{\pi}\int\frac{|\varphi(z)|^2}{1+z^2}dz.$$

(vii) **散布度的增加原理** 若 x, y 是独立的,则

$$q(x+y)\leqslant q(x) \quad \text{即} \quad \delta(x+y)\geqslant\delta(x),$$

而等号只能在 y 的分布是 δ-分布时才成立。

証明 令 x 和 y 的分布的特征函数分别为 φ_1 和 φ_2. 則

$$q(x+y)=\frac{1}{\pi}\int\frac{|\varphi_1(z)\varphi_2(z)|^2}{1+z^2}dz\leqslant\frac{1}{\pi}\int\frac{|\varphi_1(z)|^2}{1+z^2}dz=q(x).$$

为使等号成立，对 $|\varphi_1(z)|>0$ 的 z 必須有 $|\varphi_2(z)|^2=1$. 然因在 $z=0$ 的邻域上 $|\varphi_1(z)|>0$, 所以在同一的邻域上得 $|\varphi_2(z)|^2=1$. 令 y 的分布为 Φ, Φ 和負反 $\check{\Phi}$ 的卷积为 $\tilde{\Phi}$. 因为 $\tilde{\Phi}$ 的特征函数是 $|\varphi_2(z)|^2$, 并因 $\tilde{\Phi}$ 是对称分布，所以当 $|z|\leqslant a$ 时，有

$$\int\cos z\xi\,\tilde{\Phi}(d\xi)=1 \quad \text{即} \quad \int(1-\cos z\xi)\tilde{\Phi}(d\xi)=0.$$

若从 $-a$ 到 a 对 z 积分，并以 $2a$ 去除，則得

$$\int\left(1-\frac{\sin a\xi}{a\xi}\right)\tilde{\Phi}(d\xi)=0.$$

然因 $$1-\frac{\sin x}{x}>C\frac{x^2}{1+x^2}, \quad C=\text{正的常数},$$

所以 $$\int\frac{a^2\xi^2}{1+a^2\xi^2}\tilde{\Phi}(d\xi)\leqslant 0.$$

故 $\tilde{\Phi}$ 是单位分布 $\delta(\cdot;0)$, 而 Φ 就是一般的 δ 分布。

現在令 x_n 为可加叙列，并設 $y_n=x_n-x_{n-1}$. 因为 x_{n+1} 是相互独立的 x_n 和 y_{n+1} 的和，所以 $q(x_n)\geqslant q(x_{n+1})$. 因而 $\delta(x_n)\leqslant\delta(x_{n+1})$. 若設 $q=\lim q(x_n)$, $\delta=\lim\delta(x_n)$, 則下面的定理成立。

定理 1 $\delta<\infty\Leftrightarrow q>0\Leftrightarrow$ 存在 $\{a_n\}$ 使得 $\{x_n-a_n\}$ 几乎处处收斂，并且 $\delta=\delta(\lim_n(x_n-a_n))$.

定理 2 $\delta=\infty\Leftrightarrow q=0\Leftrightarrow Q_n(l)=\sup_a P\{\omega/a\leqslant x_n\leqslant a+l\}\to 0$.

証明 **2** 早已在 (v) 里叙述过。往証 **1**. 令 $\delta<\infty$, 也就是 $q>0$.

$$q=\lim_n\frac{1}{\pi}\int\frac{|\varphi_1(z)|^2\cdots|\varphi_n(z)|^2}{1+z^2}dz=\frac{1}{\pi}\int\prod_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(z)|^2\frac{dz}{1+z^2},$$

由于 $q>0$，故可适当地选取一测度为正的集合 A，使得在其上有 $\prod_n |\varphi_n(z)|^2>0$，因此

$$\sum_n [1-|\varphi_n(z)|^2]<\infty.$$

故若适当地取一测度为正的集合 A_1，则能在其上得

$$\sum_n [1-|\varphi_n(z)|^2]<C<\infty.$$

A_1 的测度(記为 $|A_1|$)可以假設为有限的。若令 y_n 的分布为 Φ_n，Φ_n 和它的負反 $\check{\Phi}_n$ 的卷积为 $\tilde{\Phi}_n$，则

$$\sum_n \int (1-\cos z\xi)\tilde{\Phi}_n(d\xi)<C. \tag{11.2}$$

因为 $0<|A_1|<\infty$，所以

$$f(\xi)\equiv\frac{1+\xi^2}{\xi^2}\int_{A_1}(1-\cos z\xi)\,dz$$

在 $0<|\xi|<\infty$ 内为連續，并且 $f(\xi)>0$．又当 $|\xi|\to\infty$ 时，就由 Riemann-Lebesgue 定理❶得 $f(\xi)\to|A_1|>0$．又当 $|\xi|\to 0$ 时，就得

$$f(\xi)\to\frac{1}{2}\int_{A_1} z^2dz>0.$$

故 $f(\xi)$ 的下确界为正，而且

$$\int_{A_1}(1-\cos z\xi)\,dz>k\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\quad(k>0).$$

因此，将(11.2)对 z 在 A_1 上积分，就得

$$\sum_n \int \frac{\xi^2}{1+\xi^2}\tilde{\Phi}_n(d\xi)<C'.$$

然因

$$\int \frac{\xi^2}{1+\xi^2}\tilde{\Phi}_n(d\xi)=\iint\frac{(\xi-\eta)^2}{1+(\xi-\eta)^2}\Phi_n(d\xi)\Phi_n(d\eta),$$

所以适当地取 $\{b_n\}$ 就得

$$\sum_n \int \frac{(\xi-b_n)^2}{1+(\xi-b_n)^2}\Phi_n(d\xi)<\sum_n \int\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\tilde{\Phi}_n(d\xi)<C'.$$

❶ 参見 S. Bochner 与 K. Chandrasekharan 著：傅立叶变式，何旭初譯，高教出版社，第一章 §2.—— 校者注

因而

$$\sum_n \int_{|\xi-b_n|>1} \Phi_n(d\xi) < \infty, \quad \sum_n \int_{|\xi-b_n|\leqslant 1} \xi^2 \Phi_n(d\xi) < \infty.$$

現在若設 $z_n = y_n - b_n$（当 $|y_n - b_n| \leqslant 1$ 时），$=0$（当 $|y_n - b_n| > 1$ 时），則由上面的結果可推得

$$\sum_n P\{\omega/z_n \neq y_n - b_n\} < \infty,$$

$$\sum_n E(z_n^2) < \infty.$$

由第1条件，并且根据 Borel-Cantelli 定理，就知在某些号数以后 $z_n = y_n - b_n$ 的概率为1. 又由第2条件而得出

$$\sum_n V(z_n) \leqslant \sum_n E(z_n^2) < \infty,$$

根据§10的定理1，可知 $\sum_n (z_n - c_n)$ $(c_n = E(z_n))$ 是几乎处处收斂的。故 $\sum_n (y_n - d_n)$ $(d_n = b_n + c_n)$ 也是几乎处处收斂。因而 $\{x_n - a_n\}$ $(a_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n)$ 也是几乎处处收斂。若令 $\lim(x_n - a_n)$ 的特征函数为 $\varphi(z)$，則因 $|\varphi(z)|^2 = \prod_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(z)|^2$，而得 $q(\lim(x_n - a_n)) = q$，因而 $\delta(\lim(x_n - a_n)) = \delta$.

上述定理1中的数列 $\{a_n\}$ 叫做**收斂化常数列**。若 $\{a_n\}$ 是收斂化常数列，$\{b_n\}$ 是收斂数列，則 $\{a_n + b_n\}$ 是收斂化常数列。作为求收斂化常数列的一个方法，有下述的定理。

定理3 若定理1的条件得到满足时，用下列等式

$$E(\arctan(x_n - c_n)) = 0 \qquad (*)$$

决定 c_n，c_n 所成的数列 $\{c_n\}$ 就是收斂化常数列。这叫做 **Doob 的收斂化常数列**。

証明 首先在上述的条件下証明 c_n 是唯一确定的。若令 c_n 从 $-\infty$ 变到 ∞，則 $E(\arctan(x_n - c_n))$ 单調地連續减少从 $\pi/2$（狹义）到 $-\pi/2$. 故存在一个而且唯一的一个 c_n 使 $(*)$ 式成立。若定理1的条件被满足，則存在收斂化常数列 $\{a_n\}$. 若能証明 $\{c_n - a_n\}$ 是收斂叙列，那么定理3就被証明了。为此，只要証明 $\{c_n - a_n\}$ 的

极限点是唯一的就行了。现在令

$$c_{p(n)}-a_{p(n)}\to c\ (p_{(n)}\text{ 是自然数的子叙列})。$$

因为

$$x_{p(n)}-c_{p(n)}=(x_{p(n)}-a_{p(n)})-(c_{p(n)}-a_{p(n)})\to x-c,$$

所以

$$E(\arctan(x-c))=\lim_n E(\arctan(x_{p(n)}-c_{p(n)}))=0.$$

故 c 是唯一确定的。

注意 在定理 1 中，$\sum y_n$ 叫做收敛型，而在定理 2 中，就叫做发散型。

§ 12 可加过程的简单性质

令 $x_t, t\in T=[a, b)$ 为可加过程。由可加过程的定义和散布度增加的原理，而得

$$(s, t)\subseteq(u, v)\Rightarrow\delta(x_v-x_u)\geqslant\delta(x_t-x_s).$$

特别設 $u=s=a$，就知道 $\delta(t)\equiv\delta(x_t)$ 是 t 的增加函数。$\delta(t)$ 的不連續点的集合 D 至多是可数的。D 是下述三集合的和。

$$D^+=\{t/\delta(t+0)>\delta(t),\ \delta(t-0)=\delta(t)\},$$

$$D^-=\{t/\delta(t+0)=\delta(t),\ \delta(t-0)<\delta(t)\},$$

$$D^0=\{t/\delta(t+0)>\delta(t),\ \delta(t-0)<\delta(t)\}.$$

如前节所述，对每一 t，使得

$$E\{\arctan(x_t-f(t))\}=0$$

的常数 $f(t)$ 是唯一确定的。现在設

$$z_t=x_t-f(t),\quad x_t=z_t+f(t).$$

令 $t_1<t_2<\cdots\to t$ 时，因为 z_{t_n}, $n=1, 2, \cdots$ 是可加叙列并且 $\delta(t_n)\leqslant\delta(t)$，所以 $\{z_{t_n}-c_n\}$ 几乎处处收敛。因为 $E(\arctan z_{t_n})=0$，所以可取 $c_n=0$。也就是說，$\{z_{t_n}\}$ 是几乎处处收斂的。其极限記为 z_{t-}。对于固定的 t，z_{t-} 除了一 P-测度为 0 的集合外可以唯一确定（例外集合是随 t 而变的）。又若对 $t_1'<t_2'<\cdots$ 来考虑同样的极限，

令它为 z'_{t-}，并把 $\{t_n\}$ 和 $\{t'_n\}$ 凑在一起，令为 $t''_1<t''_2<\cdots\to t$，而再令所对应的极限为 z''_{t-} 时，则得

$$z_{t-}=z''_{t-}=z'_{t-}\ (\mathrm{a.e.})。$$

故 z_{t-} 具概率为 1 地与 $\{t_n\}$ 的选择无关。但例外的 ω 集合是随 t 而变的。为了定义 z_{t+}，令 $t_n\downarrow t$，且来考虑 $\{z_{t_n}-z_{t_1}\}$，这也是可加叙列，又因 $\delta(z_{t_n}-z_{t_1})=\delta(z_{t_1}-z_{t_n})\leqslant\delta(z_{t_1}-z_t)$，所以 $\{z_{t_n}-z_{t_1}-c_n\}$ 几乎处处收敛。因此，$\{z_{t_n}-c_n\}$ 是几乎处处收敛的。因为 $E(\arctan(z_{t_n}-c_n))=0$，所以 $\{z_{t_n}\}$ 几乎处处收敛。令其极限为 z_{t+}。这也与 $\{t_n\}$ 的选择无关。

定理 1

$$t\notin D\Leftrightarrow P\{\omega/z_{t+}=z_t=z_{t-}\}=1,$$
$$t\in D^+\Leftrightarrow P\{\omega/z_{t-}=z_t\}=1,\ \delta(z_{t+}-z_t)>0,$$
$$t\in D^-\Leftrightarrow P\{\omega/z_{t+}=z_t\}=1,\ \delta(z_t-z_{t-})>0,$$
$$t\in D^0\Leftrightarrow\delta(z_{t+}-z_t)>0,\ \delta(z_t-z_{t-})>0.$$

在証明之前，先証下面的引理。

引理 若 $\{x_n, y_n, \cdots, u_n\}$ 对所有的 $n=1, 2, \cdots$ 是独立的，并且 $x_n, y_n, \cdots, u_n$ 当 $n\to\infty$ 时分别几乎处处收敛于 $x, y, \cdots, u$，则 $x, y, \cdots, u$ 也是独立的。

証明

$$\begin{aligned}E\{\exp\{i(\theta x+\varphi y+\cdots+\psi u)\}\}&=\lim_{n\to\infty}E\{\exp\{i\ (\theta x_n+\varphi y_n+\cdots+\psi u_n)\}\}\\&=\lim_{n\to\infty}E\{e^{i\theta x_n}\}E\{e^{i\varphi y_n}\}\cdots E\{e^{i\psi u_n}\}\\&=E\{e^{i\theta x}\}E\{e^{i\varphi y}\}\cdots E\{e^{i\psi u}\}.\end{aligned}$$

若令 $x, y, \cdots, u$ 的分布为 $\Theta, \Phi, \cdots, \Psi$，随机矢量 $(x, y, \cdots, u)$ 的分布为 F，则由上式知道，F 的特征函数就是 $\Theta\times\Phi\times\cdots\times\Psi$ 的特征函数，因而这两分布相等。这意味着 $x, y, \cdots, u$ 是独立的。

定理的証明 由上面的引理，可知 z_t-z_{t-} 和 z_{t-} 是独立的，并

因 $z_t=(z_t-z_{t-})+z_{t-}$, $\delta(z_t)=\lim\limits_{s\uparrow t}\delta(z_s)=\delta(t-0)$，所以若 $\delta(t-0)=\delta(t)$，則 z_t-z_{t-} 为一常数(具概率为 1)。由于 $E(\operatorname{arc}\tan z_t)=0$，而得 $E(\operatorname{arc}\tan z_{t-})=\lim\limits_{s\uparrow t}E(\operatorname{arc}\tan z_s)=0$，所以这常数应該是 0。也就是說，$P(z_t=z_{t-})=1$。若 $\delta(t-0)<\delta(t)$，則 z_t-z_{t-} 不为常数，且得 $\delta(z_t-z_{t-})>0$。对于 z_t 来說，也是一样。綜合起来就得上述的定理。

在下面将把所有的 z_t 的跃度 $z_{t+}-z_{t-}$, $t\in D$ 湊起来定义可加过程 u_t. 对这个 u_t，不允許簡单地用下列公式：

$$u_t=\sum_{\substack{s\leqslant t\\ s\in D}}(z_{s+}-z_{s-})$$

作为它的定义，因为这样发生了无限和的收斂問題。因为 D 是可数集合，所以可把其元素排成一列 $s_1, s_2, \cdots$。設

$$u_t^{(n)}=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ s_i\leqslant t}}(z_{s_i+}-z_{s_i-})-c_t^{(n)},$$

但当 $s_i=t$ 时，就以 z_t 代替 z_{s_i+}。$c_t^{(n)}$ 是使 $E(\operatorname{arc}\tan u_t^{(n)})=0$ 的常数。因为 $u_t^{(n)}$ 是独立随机变数的可数和的部分和，并由散布度增加原理，得 $\delta(u_t^{(n)})\leqslant\delta(z_t)$，所以 $u_t^{(n)}$ 是几乎处处收斂的。这极限可以記为 u_t. 显然 $E(\operatorname{arc}\tan u_t)=0$. 注意到这点就会知道，縱使改变 D 的排列也可以得到同样的 u_t. 由定义显然有

定理 2 u_t 是可加过程，而 $\delta(u_t)$ 是仅在 D 中的点上产生跳跃，且具有正的跃度的純粹不連續的增加函数，則

当 $t\notin D$ 时，$P\{\omega/u_{t-}=u_t=u_{t+}\}=1$,

当 $t\in D$ 时，$P\{\omega/u_{t+}-u_t=z_{t+}-z_t+\text{常数}\}=1$,

$$P\{\omega/u_t-u_{t-}=z_t-z_{t-}+\text{常数}\}=1.$$

其次設 $v_t=z_t-u_t-c_t$(选 c_t 使得 $E(\operatorname{arc}\tan v_t)=0$)，而去考察 v_t 的性质。

定理 3 v_t 是可加过程，而 $\delta(v_t)$ 是 t 的連續函数，則

$$P\{\omega/v_{t-}=v_t=v_{t+}\}=1. \tag{12.1}$$

証明 若設 $v_t^{(n)}=z_t-u_t^{(n)}-c_t$，則这显然是可加过程。因为 $v_t^{(n)}$ 几乎处处收斂于 v_t，所以利用上面的引理1，就知道 v_t 也是可加过程。由 $E(\arctan v_t)=0$，就可以确定 v_{t-} 和 v_{t+}．因此，c_{t-0} 和 c_{t+0} 也可以确定。由定理2，可知 $v_{t+}-v_t$ 和 v_t-v_{t-} 都是常数的概率为1．若注意到 $E(\arctan v_t)=0$，則知这常数非为0不可。因此，(12.1)成立。由此以及定理1卽知 $\delta(v_t)$ 的不連續点是不存在的。

綜合以上所述，就得分解

$$x_t=u_t+v_t+g(t),\ g(t)=f(t)+c_t,$$

其中 $g(t)$ 是 t 的函数（不包含 ω），u_t 和 v_t 是可加过程，$\delta(u_t)$ 是純粹不連續的，而 $\delta(v_t)$ 是連續的。而 $E(\arctan u_t)=E(\arctan v_t)=0$．从而得到了(12.1)。对于 u_t 和 v_t 的关系，則有下述的

定理4 两个可加过程 $u_t, t\in T$，和 $v_t, t\in T$，是独立的（卽指随机矢量 $\prod_t u_t$ 和 $\prod_t v_t$ 是独立的）。

証明 由于 $z_{s_i-}-z_{s_{i-1}}, z_{s_i}-z_{s_i-}$ 和 $z_{s_i+}-z_{s_i}, i=1,2,\cdots,n$ 的独立性以及在§3里所述有关独立性的性質，可知 $u_t^{(n)}, t\in T$，和 $v_t^{(n)}, t\in T$，是独立的。故对于任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 来說，m 維的随机矢量 $\prod_i u_{t_i}^{(n)}$ 和 $\prod_i v_{t_i}^{(n)}$ 是独立的。因为本节的引理对于 m 維随机矢量也成立，所以 $\prod_i u_{t_i}$ 和 $\prod_i v_{t_i}$ 是独立的，因而 $\prod_t u_t$ 和 $\prod_t v_t$ 是独立的。

由上可知，要研究可加过程，只要分别研究 $\delta(x_t)$ 是純粹不連續的情形和 $\delta(x_t)$ 是連續的情形卽可。前者往往是由这样的形状所构成的：固定 $[a,b)$ 中的可数子集 D，而对 D 的每一点 t，对应着二个随机变数 ξ_t 和 η_t，使得所有的 ξ_t 和 η_t，$t\in D$ 都为独立。幷且对 $a\leqslant s<b$ 的 s，令

$$\xi_s+\sum_{t<s,\,t\in D}(\xi_t+\eta_t)$$

为收斂型（§11末尾的注意）。由此減去Doob的收斂化常数列，然

后求和，若令其和为 x_t，则得具純粹不連續的 $\delta(x_t)$ 的可加过程。至于 $\delta(x_t)$ 是連續的場合，将在以下数节中来說明。

§13 随机过程的可分性❶

令 $x_t(\omega)$，$t\in T$，为任意的随机过程。因为对于每个 t，$x_t(\omega)$ 是 ω 的可測函数，所以

$$A=\{\omega/x_{t_1}(\omega)\leqslant a_1,\ x_{t_2}(\omega)\leqslant a_2,\ \cdots,\ x_{t_n}(\omega)\leqslant a_n\},$$

$$B=\{\omega/\overline{\lim_n}\, x_{t_n}(\omega)\leqslant a\},$$

$$C=\{\omega/\text{对所有的有理数 } t\in T,\ x_t(\omega)\leqslant 1\}$$

等都是可測集，故可求出它們的 P-測度。又若对所有的 $t\in T$，

$$P\{C_t\}=1,\quad C_t=\{\omega/x_t(\omega)\leqslant 1\},$$

則上面的 C 可以写成

$$C=\bigcap_{\substack{t\in T\\ t\text{ 是有理数}}} C_t,$$

所以它是可列个 P-測度为 1 的集合的交，因而 $P(C)=1$。然而，若考虑以

$$C'=\{\omega/\text{对所有的 } t\in T,\ x_t(\omega)\leqslant 1\}$$

来代替 C 时，則因 $C'=\bigcap_t C_t$，所以 C' 是非可数个 P-測度为 1 的集合的交，因而无法知道其是否可測，并可分成三种情形。有时，它可以是可測的，且其 P-測度为 1；有时它也可以是可測的，但其 P-測度为 0；有时，它也可以是不可測。由以上所述，就可以知道：

“由随机过程的定义可知，对于有关至多可数个时点 (t) 的值的事件的概率是可用通常方法加以討論的，但是对于有关非可数个时点的值的事件的概率就需要进行特别的討論。”

有关随机过程的重要的情形，例如

（i）$x_t(\omega)$ 关于 t 是連續的，

❶ 关于可分性的詳細討論，可参見 J. L. Doob 著：Stochastic Processes，第二章 §2.——校者注

(ii) $x_t(\omega)$作为 t 的函数是有界的，

(iii) $x_t(\omega)$是 t 的增加函数，

等都是与非可数个时点有关。为了討論这种情形的概率，就必須对随机过程加以限制。首先注意到这一点的是Doob，他引进了所謂**可分性**(separability)的限制来克服这种困难。

定义 称随机过程 x_t，$t\in T$，是可分的，是指存在 T 的可数子集 S，使得

(S) $P\{\omega$/对所有的 $t\in T$，

$$\varliminf_{\substack{s\to t\\ s\in S}} x_s(\omega)\leqslant x_t(\omega)\leqslant \varlimsup_{\substack{s\to t\\ s\in S}} x_s(\omega)\}=1.$$

对可分随机过程 $x_t(\omega)$，$t\in T$，来說，(i)，(ii)和(iii)中所涉及的事件都是可测的。显然，若(i)所指的事件的概率等于1，則 x_t，$t\in T$，就是可分的。

称随机过程 x_t，$t\in T$ 和 y_t，$t\in T$，'**在弱的意义下相同**'是指对所有的 $t\in T$，均有

$$P\{\omega/x_t(\omega)=y_t(\omega)\}=1.$$

由此，对任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_n\in T$ 和任意的 $E_n\in \boldsymbol{B}^n$，就有

$$P\{\omega/(x_{t_1}(\omega),\cdots,x_{t_n}(\omega))\in E_n\}$$
$$=P\{\omega/(y_{t_1}(\omega),\cdots,y_{t_n}(\omega))\in E_n\}.$$

更一般地对于 $E\in \boldsymbol{B}^T$，下式也成立

$$P\{\omega/\prod_t x_t\in E\}=P\{\omega/\prod_t y_t\in E\}.$$

然而由于以 T 为定义域的連續函数的全体 C，虽是 R^T 的子集，但不属于 $\boldsymbol{B}^T$，所以

$$P\{\omega/\prod_t x_t\in C\}=P\{\omega/\prod_t y_t\in C\}$$

不一定成立。若 x_t，$t\in T$，不是可分的，則上式左边的 ω 集合不一定是 P-可测的。对于 y_t 也是一样的。

在弱的意义下相同的二个随机过程，即使其中一个是可分的，

但另一个也不一定是可分的。

依 Doob 建立了下述的

定理 1 对任意的随机过程，存在与它在弱的意义下相同的可分随机过程。称它为原来的随机过程的**可分修正** (separable modification)。

因此，若过程不是可分的，则可代之以可分修正，因而只须研究可分过程就够了。

§14 可分 Poisson 过程

如前面所定义那样，可加过程 x_t，$t\in T$，当 $x_s-x_t\,(s>t)$ 的分布是 Poisson 分布 $P(\lambda(s-t))$时，叫做 **Poisson 过程** (Poisson process)。若它是可分的，则叫做**可分 Poisson 过程**。因为 Poisson 过程存在，所以取其可分修正，就知道可分 Poisson 过程也存在。

定理 1 若令 x_t，$t\in T=[a, b)$，为可分 Poisson 过程，則其样本过程具概率为 1 地是跃度 1 的增加的阶梯函数（但是跳跃点上的值处于左右两极限之間）。

証明 由可分性的定义，可知存在 T 的可数子集 S，使下述的 ω 集合的 P–测度为 1：

$$\Omega'=\{\omega/\varliminf_{\substack{s\to t\\ s\in S}} x_s(\omega)\leqslant x_t(\omega)\leqslant \varlimsup_{\substack{s\to t\\ s\in S}} x_s(\omega),\ t\in T\}.$$

当 t 为固定时

$$\Omega_t=\{\omega/x_t(\omega)=\text{非負的整数}\}$$

的 P–测度就为 1．这是由于 x_t 的分布是 $P(\lambda(t-a))$ 的緣故。又因 $x_t-x_u\,(t>u)$ 的分布为 $P(\lambda(t-u))$，所以

$$\Omega_{ut}=\{\omega/x_t(\omega)-x_u(\omega)\geqslant 0\}$$

的 P–测度亦应为 1．而 S 是可数集合，所以

$$\Omega''=\bigcap_{s\in S}\Omega_s\cap\bigcap_{\substack{s<t\\ s,t\in S}}\Omega_{st}\cap\Omega'$$

的 P-測度也为 1. 若 $\omega\in\Omega''$,則作为 t 的函数,$x_t(\omega)$ 就是跃度为 1, 2, 3, …的增加的阶梯函数。

若能証明使得 $x_t(\omega)$ 的跃度大于或等于 2 的 ω 集合 N 的 P-測度为 0,那末証明就告完毕。这只須証明 $x_t(\omega)$ 在 $a\leqslant t\leqslant t_0$ 内具有跃度大于等于 2 的跳跃的 ω 集合 $N(t_0)$ 的 P-測度为 0 卽可。現在若設

$$E_{nk}=\left\{\omega\Big/x\left(a+\frac{k}{n}(t_0-a),\omega\right)-x\left(a+\frac{k-1}{n}(t_0-a),\omega\right)\geqslant 2\right\},$$
$$1\leqslant k\leqslant n,$$

則得

$$N(t_0)\subset\bigcup_k E_{nk},$$

故得

$$P(N(t_0))\leqslant\sum_{k=1}^{n}P(E_{nk})=O\left(n\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\to 0\quad(n\to\infty).$$

定义 令 x_t, $t\in T$,为任意的随机过程,且对任意的 $\varepsilon>0$,

$$P\{\omega/|x_t-x_s|>\varepsilon\}\to 0\quad(t\to s)$$

时,就称随机过程在 s 上**依概率連續**(continuous in probability). 若在 T 的所有的点上依概率連續时,則称 x_t, $t\in T$,为**依概率連續的随机过程**。

若对上述的(可分)Poisson 过程来說,則由于

$$P\{\omega/|x_t-x_s|>\varepsilon\}=O(|t-s|)\to 0\quad(t\to s),$$

所以它是依概率連續的。但是可分 Poisson 过程的样本过程恰恰不是連續函数而是阶梯函数。粗略地說,就是每个样本过程都含有不連續点,但因不連續点随 ω 而变动,所以若着眼于一个点,則在这点上为不連續的概率为 0. 实际上,若令 $x_{t+0}=x_{t-0}$ 的 ω 集合为 N_t 时,虽然 $P(N_t)=1$,但 $P(\bigcap_t N_t)=0$.

若 x_t 是依概率連續的可加过程,并且 $x_s-x_t\,(s>t)$ 的分布

为 Poisson 分布，则 x_t 叫做**广义的 Poisson 过程**。若令 $\lambda(t)=E(x(t))$，则由过程的依概率連續性，$\lambda(t)$ 就成为 t 的連續函数。$x_s-x_t(s>t)$ 的分布就是 $P(\cdot;\lambda(s)-\lambda(t))$。前述的 Poisson 过程就是 $\lambda(t)=\lambda\cdot(t-a)$ 这一特殊場合。此时，称它为**对时間齐次**(temporally homogeneous)的 Poisson 过程。

定理 1′ 定理 1 相同的結論，对广义的可分 Poisson 过程来說也是成立的。

反之，有下述的

定理 2 若有一依概率連續的可加过程，其样本过程具概率为 1 地是跃度为 1 的增加的阶梯函数，則这就是广义的可分 Poisson 过程。

証明 令 x_t, $t\in T=[a,b)$ 为所討論的可加过程。由于假定样本过程是阶梯函数，因而可分性是明显的。因此，只要証明 $x_s-x_t(s>t)$ 的分布是 Poisson 分布就行了。由依概率連續性，而知对 $u\in T$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,u)$，并且当 $|v-u|<\delta$ 时，使得

$$P\{\omega/|x_v-x_u|>\varepsilon\}<\varepsilon,$$

但由 Borel 的复盖定理，可知在 $t\leqslant u\leqslant s$ 内可以取得 $\delta(\varepsilon,u)$ 与 u 无关。把区間 $[t,s]$ 划分为 n 等分，令 x_t 在各小区間上的增量为 $y_{n1},y_{n2},\cdots,y_{nn}$，且設 $y=y_{n1}+\cdots+y_{nn}=x_s-x_t$。令 y'_{nk} 随着 $y_{nk}\leqslant 1$ 或者 $\geqslant 2$ 而等于 y_{nk} 或者 0，又設

$$y'_n=y'_{n1}+y'_{n2}+\cdots+y'_{nn}.$$

根据有关 x_t 的样本过程的假定，而得

$$P(y'_n\to y)=1.$$

其次，若設 $p_{nk}=P\{\omega/y'_{nk}=1\}$，則 $p_{nk}=P\{\omega/y_{nk}=1\}$，所以由上述而知，极限 $p_{nk}\to 0(n\to\infty)$ 对 k 一致地成立。又因 $\{y_{nk},k=1,2,\cdots,n\}$ 是独立的，所以 $\{y'_{nk},k=1,2,\cdots,n\}$ 也是独立的。

(i) $\sum_k p_{nk}\to\lambda$(有限)时，

$$E(e^{izy})=\lim_n E(e^{izy_n'})=\lim_n \prod_k E(e^{izy_{nk}'})$$
$$=\lim_n \prod_k (1-p_{nk}+e^{iz}p_{nk})=\lim_n \prod_k (1+p_{nk}(e^{iz}-1)).$$

由 $\sum_k p_{nk}\to\lambda$ 和 $\sum_k p^2\leqslant\max_k p_{nk}\sum_k p_{nk}\to 0$，可知上面的最后一式变为 $\exp\{\lambda(e^{iz}-1)\}$，于是知道 y 的分布是 Poisson 分布。

(ii) $\sum_k p_{nk}$，$n=1, 2, \cdots$，的子叙列有有限的极限时，也与(i)相同。

(iii) $\sum_k p_{nk}\to\infty$ 时。因为 p_{nk} 当 $n\to\infty$ 时关于 k 一致地变小，所以对任意的 $\lambda>0$ 和 n，可以定出 $K=K(n, \lambda)$，使得

$$\sum_{k=1}^{K} p_{nk}\to\lambda.$$

若設 $y_n''=\sum_{k=1}^{K} p_{nk}$，則与(i)同样地可得

$$|E(e^{izy})|\leqslant\lim_n\left|\prod_{k=1}^{K} E(e^{izy_{nk}'})\right|=|\exp\{\lambda(e^{iz}-1)\}|$$
$$=\exp\{\lambda(\cos z-1)\}.$$

因为 λ 可任意取无論多大的数，所以若令 $\lambda\to\infty$ 时，則在 $0<z<2\pi$ 的范圍內右边为 0，因而 $|E(e^{izy})|=0$. 若令 $z\downarrow 0$，則 $1=0$，于是导致了矛盾的結果。故不可能发生(iii)的情形。

§ 15 可分 Wiener 过程

关于可分 Wiener 过程的定义和其存在性，已无須加以說明了。

定理 1 可分 Wiener 过程的样本过程具概率为 1 地为連續。

証明 令 x_t, $t\in T=[a, b)$ 为 Wiener 过程，且令在定义可分性时所用的可数集合为 S. 也就是說

$$\Omega'=\{\omega/\varliminf_{\substack{s\to t\\ s\in S}} x_s(\omega)\leqslant x_t(\omega)\leqslant\varlimsup_{\substack{s\to t\\ s\in S}} x_s(\omega),\ t\in T\}$$

的概率是 1. 由于正态分布的性質，而得

$$P\{\omega/|x_\beta-x_\alpha|>\varepsilon\}=o(\beta-\alpha),$$

对于 $\alpha=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n=\beta$，因为 $y_\nu=x_{\alpha_\nu}-x_{\alpha_{\nu-1}}$，$\nu=1, 2, \cdots, n$，是独立的，所以由 Ottaviani 的定理，得

$$P\{\omega/\max_\nu|x_{\alpha_\nu}-x_\alpha|>2\varepsilon\}\leqslant 2P\{\omega/|x(\beta)-x(\alpha)|>\varepsilon\}.$$

其次，若在$[\alpha, \beta]$内有可数个点 $t_1, t_2, \cdots$时，則可按照大小的顺序把 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 重行排列，然后利用上述的結果，再令 $n\to\infty$ 便得

$$P\{\omega/\sup_\nu|x_{t_\nu}-x_\alpha|>2\varepsilon\}\leqslant 2P\{\omega/|x_\beta-x_\alpha|>\varepsilon\}.$$

因此
$$P\{\omega/\sup_{t\in[\alpha,\beta]\cap S}|x(t)-x(\alpha)|>2\varepsilon\}=o(\beta-\alpha),$$

由可分性得

$$P\{\omega/\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|x(t)-x(\alpha)|>2\varepsilon\}=o(\beta-\alpha).$$

那末，若 $b<\infty$，則把$[a, b)$等分为 n 个小区間 $I_{n\nu}=[\alpha_{n,\nu-1}, \alpha_{n,\nu}]$，$\nu=1, 2, \cdots, n$，就得

$$P\{\omega/\max_{\nu=1}^{n}\sup_{t\in I_{n\nu}}|x_t-x_{\alpha_{n,\nu-1}}|>2\varepsilon\}$$
$$\leqslant\sum_\nu P\{\omega/\sup_{t\in I_{n\nu}}|x_t-x_{\alpha_{n,\nu-1}}|>2\varepsilon\}=n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)=o(1).$$

若$|t-s|<(b-a)/n$，則 t 和 s 落入同一的 $I_{n\nu}$ 中或者分别落入邻近的 $I_{n\nu}$ 中，所以

$$P\{\omega/\sup_{|t-s|<(b-a)/n}|x_t-x_s|>4\varepsilon\}=o(1).$$

因为这个 ω 集合随 n 而减少，所以

$$P\{\omega/\lim_n\sup_{|t-s|<(b-a)/n}|x(t)-x(s)|>4\varepsilon\}=0.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 就得定理的結論。

当 $b=\infty$ 时，若設

$$\Omega'_k=\{\omega/x_t(\omega)\text{ 連續于 }a\leqslant t\leqslant k\},$$
$$\Omega'=\{\omega/x_t(\omega)\text{ 連續于 }a\leqslant t<\infty\},$$

則 $\Omega'_k\downarrow\Omega'$。由以上所述就得 $P(\Omega'_k)=1$。故 $P(\Omega')=1$。

与 Poisson 过程的場合一样，可以定义广义的 Wiener 过程为依概率連續的可加过程，而且 $x_s-x_t\,(s>t)$ 的分布为正态分布。

若令 x_t 即 x_t-x_a 的分布为 $N(\cdot;m(t),v(t))$，則 x_s-x_t 的分布为 $N(\cdot;m(s)-m(t),v(s)-v(t))$。由依概率連續性的假定可推出 $m(t)$ 和 $v(t)$ 是連續的。当然 $v(t)$ 是增加函数。关于广义 Wiener 过程及广义可分 Wiener 过程的存在，恐怕不需要从新說明的了。

定理 1' 定理 1 对于广义 Wiener 过程来說也成立。

反之，有下述的

定理 2 若有一依概率連續的可加过程，其样本过程具概率为 1 地連續，則它是广义可分 Wiener 过程。

証明 令 x_t，$t\in T=[a,b)$ 为所討論的可加过程。由于假定样本过程是連續的，因而可分性是明显的。因此只要証明 $x_s-x_t(s>t)$ 的分布是正态分布就行了。考虑到連續函数在有界区間上的一致連續性，因而对任意的 $\varepsilon>0$，可以找到 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得

$P\{\omega/u,v\in[t,s],|u-v|<\delta\Rightarrow|x(u)-x(v)|<\varepsilon\}>1-\varepsilon$[1]。

于是就可取一列 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots\to0$，及取正整数 $p(n)$ 使 $(s-t)/p(n)=o(\varepsilon_n)$。若把 $[t,s)$ 等分为 $p(n)$，而令 $t=t_{n0}<t_{n1}<\cdots<t_{np(n)}=s$，然后依 $y_{n\nu}=x_{t_{n\nu}}-x_{t_{n,\nu-1}}$，或 $|y_{n\nu}|<\varepsilon_n$，而定义 $y'_{n\nu}=y_{n\nu}$ 或者等于 0，再設 $y'_n=\sum\limits_\nu y'_{n\nu}$，則得

$$P\{\omega/y\neq y'_n\}<\varepsilon_n,$$

所以考虑到 $\{y'_{n\nu}\}$ 的独立性，就得

$$E(e^{izy})=\lim_n E(e^{izy'_n})=\lim_n\prod_\nu E(e^{izy'_{n\nu}}). \qquad (*)$$

（i）設 $m_{n\nu}=E(y'_{n\nu})$，$v_{n\nu}=V(y'_{n\nu})$，$m_n=\sum\limits_\nu m_{n\nu}$ 和 $v_n=\sum\limits_\nu v_{n\nu}$ 时，若 $m_n\to m$（有限），$v_n\to v$（有限），則由 $(*)$ 得

$$E(e^{izy})=\lim_n e^{izm_n}\prod_\nu E(e^{iz(y'_{n\nu}-m_{n\nu})})$$

$$=e^{izm}\lim_n\prod_\nu\left(1-\frac{v_{n\nu}}{2}z^2+v_{n\nu}\cdot O(\varepsilon_n)\right)$$

---

[1] 这个不等式可仿照实变函数論中的叶果洛夫定理的証明方法由过程的依概率連續性即可推出。——校者注

$$=e^{izm}\lim_n \prod_\nu e^{-\frac{v_{n\nu}}{2}z^2+v_{n\nu}O(\varepsilon_n)}$$

$$=e^{izm}\lim_n e^{-\frac{v_n}{2}z^2+v_nO(\varepsilon_n)}=e^{izm-\frac{v}{2}z^2}.$$

故 y 的分布是正态分布。

(ii) m_n 和 v_n 的子叙列分别接近于有限值时，也与 (i) 相同。

(iii) 当 v_n 或者其子叙列接近于有限值 v 时，与 (i) 的做法一样，就可使得 y'_n-m_n 或者它的子叙列的分布接近于 $N(0, v)$. 然因 y'_n 的分布接近于 y 的分布，所以 m_n 或者它的子叙列接近于某个有限值 m，于是就归結到 (ii) 的場合。

(iv) 若 $v_n\to\infty$，由于 $|v_{n\nu}|\leqslant 4\varepsilon_n^2$，所以对任意的 v 可以定出 $q(n)$ 使 $\sum_{\nu=1}^{q(n)} v_{n\nu}\to v$. 由 (*) 得

$$|E(e^{izy})|\leqslant \overline{\lim_n}\prod_{\nu=1}^{q(n)}|E(e^{izy'_{n\nu}})|=e^{-\frac{v}{2}z^2}.$$

令 $v\to\infty$，就得 $|E(e^{izy})|=0$. 这是矛盾。于是 (iv) 的情形不会发生。

§ 16 依概率連續的可加过程和无穷可分分布律

早已在 § 12 里証明了这样的分解：一般的可加过程 $x_t, t\in T$，可以分解为

$$x_t=u_t+v_t+g(t),$$

而 $\delta(u_t)$ 为連續，且 $E(\arctan u_t)=0$; $\delta(v_t)$ 为純粹不連續，且 $E(\arctan v_t)=0$; $g(t)$ 只是 t 的函数，而且 $u_t, t\in T$，与 $v_t, t\in T$，是独立的。因为 v_t 的构造已在那时說明了，所以就剩下考察 u_t 的問題。由前可知对 u_t 有

$$P\{\omega/u_{t-}=u_t=u_{t+}\}=1,\quad t\in T. \tag{16.1}$$

因此它是依概率連續的。但是，正如对 Poisson 过程所指出的情形一样，(16.1) 并不能表示样本过程的連續性。

依概率連續的可加过程究竟是怎样的过程呢？下面就来研究这个問題。

定理1 令 x_t 为依概率連續的可加过程。对于任意的 t，取叙列 $t_1<t_2<\cdots\to t$，則 x_{t_n} 几乎处处收斂于 x_t。对于 $t_1>t_2>\cdots$ 的叙列来說也是一样的。当然，几乎处处收斂中的例外 ω 集合，一般是与 t 以及叙列的选擇有关的。

証明 由依概率連續的假定，可知 x_{t_n} 依概率收斂于 x_t。对于叙列 $t_1<t_2<\cdots\to t$，因 $x_{t_n}=x_{t_1}+(x_{t_2}-x_{t_1})+\cdots+(x_{t_n}-x_{t_{n-1}})$ 中的各項是独立的，故由 §10 的定理3，可知 x_{t_n} 是几乎处处收斂的。因而 x_{t_n} 几乎处处收斂于 x_t。对于 $t_1>t_2>\cdots$ 的情形也是一样。

我們已經知道，广义的 Poisson 过程和广义的 Wiener 过程都是依概率連續，而且其增量 $x_s-x_t\,(s>t)$ 的分布分別是 Poisson 分布和正态分布。因此，由于考虑一般的依概率連續的可加过程的增量 x_s-x_t 的分布，就可設想它是包含 Poisson 分布以及正态分布在內的一般的分布。这种分布叫做无穷可分分布。

若一維分布 Φ 滿足

$$\int_{|\xi|>\varepsilon}\Phi(d\xi)<\varepsilon,$$

則記之为 $\Phi\in U(\varepsilon)$。因此，Φ_n 趋向于单位分布，就等价于：对任意的 $\varepsilon>0$，可以找到 $n_0(\varepsilon)$，当 $n>n_0(\varepsilon)$ 时，$\Phi_n\in U(\varepsilon)$。

将依概率連續的可加过程的增量 x_s-x_t 的分布記为 Φ_{ts}。根据依概率連續性，对任意的 $\varepsilon>0$ 和 u，可以找到 $\delta=\delta(\varepsilon,u)$，使得

$$|v-u|<\delta\Rightarrow P\{\omega/|x_v-x_u|>\varepsilon\}<\varepsilon,$$

但由 Borel 的复盖定理可知，对 $t\leqslant u\leqslant s$ 而言，可以取 $\delta(\varepsilon,u)$ 为与 u 无关的 $(\delta(\varepsilon))$。若把区間 $[t,s)$ 分成充分地小，使 $t=u_0<u_1<\cdots<u_n=s$，且 $u_i-u_{i-1}<\delta(\varepsilon)$，則由上述可得

$$\Phi_{u_{i-1}u_i}\in U(\varepsilon),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

又由可加性，得

$$\Phi_{ts}=\Phi_{u_0u_1}*\Phi_{u_1u_2}*\cdots*\Phi_{u_{n-1}u_n}.$$

粗略地說，就是 Φ_{ts} 可表为充分接近单位分布的分布的卷积。

現在脫离可加过程来考虑。若有分布 Φ，对任意的 $\varepsilon>0$，成立着形状如

$$\Phi=\Phi_1*\Phi_2*\cdots*\Phi_n, \qquad \Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n\in U(\varepsilon)$$

的分解式时，Φ 就叫做**无穷可分的**(infinitely divisible)。由

$$N(\cdot; m, v)=N_1*\cdots*N_n, \quad N_1=N_2=\cdots=N_n=N\left(\cdot;\frac{m}{n},\frac{v}{n}\right)$$

$$P(\cdot;\lambda)=P_1*\cdots*P_n, \qquad P_1=P_2=\cdots=P_n=P\left(\cdot;\frac{\lambda}{n}\right)$$

便知正态分布和 Poisson 分布都是无穷可分的。依概率連續的可加过程的增量的分布(上述的 Φ_{ts})也显然是无穷可分的。反之，有

定理 2 对于无穷可分的分布 Φ，可以定出依概率連續的可加过程 x_t，$t\in[0, 1]$，使得 $x_1(=x_1-x_0)$ 的分布等于 Φ.

証明 当 $\Phi=\delta(\cdot; m)$ 时，設 $x_t(\omega)\equiv m\cdot t$ 就行了。因此不考虑这种特別的場合，而假定 $\delta(\Phi)>0$. 由

$$\int \arctan(\xi-c)\,\Phi(d\xi)=0$$

唯一定出了一个常数 c(这在討論 Doob 的收斂常数列时已用过)，故此叫做 Φ 的**中位数** $\alpha(\Phi)$. 当 $\alpha(\Phi)=c$ 时，$\Phi*\delta(\cdot;m)$ 的中位数就为 $c+m$. 为了証明这定理，不妨假定 $\alpha(\Phi)=0$. 这是因为对一般的 Φ 来說，若考虑 $\Phi*\delta(\cdot;-c)$，$c=\alpha(\Phi)$ 时，則这也是无穷可分分布，而且其中位数为 0，所以若令相应的可加过程为 x_t，則 $y_t=x_t+ct$ 即为对应于 Φ 的可加过程。

令 $[0, 1]$ 中的全体有理数为 S，規定分布叙列 $\Phi=\{\Phi_{ts}, t\leqslant s, t, s\in S\}$ 满足下述四个条件：

(i) $\Phi_{01}=\Phi$,

(ii) $s\leqslant t\leqslant u\Rightarrow\Phi_{st}*\Phi_{tu}=\Phi_{su}$,

(iii) $\alpha(\Phi_{0t})=0$,

(iv) $\delta(\Phi_{0t})=t\delta(\Phi)$.

取 $\varepsilon_n\to 0$ 的正数列 $\{\varepsilon_n\}$，再令 Φ 对 ε_n 的分解为

$$\Phi=\Phi_{n1}*\Phi_{n2}*\cdots*\Phi_{np(n)},\quad \Phi_{ni}\in U(\varepsilon_n).$$

若有必要，就以 $\Phi_{ni}*\delta(\cdot;m_i)$ 代替 Φ_{ni}，因而可以假定

$$\alpha(\Psi_{ni})=0,\quad \Psi_{ni}=\Phi_{n1}*\cdots*\Phi_{ni},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

又可以假定所有的 Φ_{ni} 都不是 δ 分布。因之 $\delta(\Psi_{ni})$ 随 i 而真正地增加，对 t 确定 i，使得

$$\delta(\Psi_{n,i-1})/\delta(\Phi)\leqslant t<\delta(\Psi_{n,i})/\delta(\Phi),$$

同样，对 $s(>t)$ 也可确定满足上式的 j. 令

$\Phi_{ts}^{(n)}=\Phi_{n,i}*\cdots*\Phi_{n,j-1}$ 当 $i<j$ 时；$\Phi_{ts}^{(n)}=$单位分布当 $i=j$ 时。

$\Phi^{(n)}=\{\Phi_{ts}^{(n)},\ t,s\in S,\ t\leqslant s\}$ 可以看做是 Φ 的近似系列。对 $\Phi^{(n)}$ 虽然(i)，(ii)和(iii)也成立，但(iv)就不过是近似的而已。从 $\Phi^{(n)}$ 取出子叙列而定义 Φ 为其极限，这就是欲求的目的。为此先引进下述的

引理 若 $\Phi_n*\Psi_n=\Phi$, $n=1,2,\cdots$，则存在 $\{\Phi_n\}$ 的子叙列 $\{\Phi_{n'}\}$ 和实数列 $\{m(n)\}$，使得 $\{\Phi_{n'}*\delta(\cdot;m(n))\}_n$ 收敛于某个 Φ_∞. 特别当 $\alpha(\Phi_n)=0$ 时，可以假設 $m(n)=0$.

証明 令 Φ_n 的分布函数为 $F_n(x)$. 因为由 $\Phi_n*\Psi_n=\Phi$ 得出 $[\Phi_n*\delta(\cdot;m)]*[\Psi_n*\delta(\cdot;-m)]=\Phi$，所以假定

$$F_n(-0)\leqslant 1/2;\quad F_n(0)\geqslant 1/2$$

也不失普遍性。由这条件得出

$$F_n(y)-F_n(x)>1/2\Rightarrow x\leqslant 0\leqslant y. \tag{16.2}$$

由假定 $\Phi_n*\Psi_n=\Phi$，便得

$$\int_{-\infty}^{\infty}[F_n(l-x)-F_n(-l-x)]\Psi_n(dx)=\Phi[-l,l],$$

取 l 足够大，使右边大于 $1/2$，然后适当地取 $m(n)$ 就得

$$F_n(l-m(n))-F_n(-l-m(n)-0)\geqslant\varPhi[-l,\ l]\geqslant 1/2.$$

故由(16.2)便得 $-l\leqslant m(n)\leqslant l$。因此，可适当地取 $\{n\}$ 的子叙列 $\{n'\}$ 使 $\{m(n')\}_n$ 收斂于某个 m，另外可取 $\{n'\}$ 的子叙列——再次記为 $\{n'\}$——使 $\{F_{n'}(x-m(n_1'))\}_n$ 除在可数例外点以外，收斂于单調增加的右連續函数 $F_0(x)$。因为 $m(n')\to m$，所以 $\{F_{n'}(x-m)\}$ 也在上述的意义下趋近于 $F_0(x)$，因而 $\{F_{n'}(x)\}$ 除在可数例外点以外，趋近于 $F(x)\equiv F_0(x+m)$。又由 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$ 可得

$$F(\infty)-F(-\infty)\geqslant F_0(l)-F_0(-l-0)\geqslant\varPhi[-l,\ l].$$

其次，令 L 为大于 l 的任意的数，而对 L 和 $\{F_{n'}(x)\}_n$ 重复上述的論証，就可得到 $\{F_{n'}(x)\}$ 的子叙列 $\{F_{n''}(x)\}$，使其除在可数例外点以外，趋近于某个 $G(x)$，而且

$$G(\infty)-G(-\infty)\geqslant\varPhi[-L,\ L].$$

然因 $\{F_{n'}(x)\}$ 本来就趋近于 $F(x)$，所以 $G=F$。故得

$$F(\infty)-F(-\infty)\geqslant\varPhi[-L,\ L].$$

因为 L 是任意的，所以令 $L\to\infty$ 便得 $F(\infty)-F(-\infty)=1$。若令 F 所对应的一維分布为 $\varPhi_\infty$，則 $\{\varPhi_{n'}\}_n$ 就趋近于 $\varPhi_\infty$。若 $\alpha(\varPhi_n)=0$，則可由 $\varPhi_{n'}*\delta(\cdot;m(n))\to\varPhi_\infty$ 得出 $m(n)\to\alpha(\varPhi_\infty)$，所以 $\{\varPhi_{n'}\}$ 本身就成为收斂叙列。

現在回到定理的証明上去。因为 $\varPhi^{(n)}_{st}*[\varPhi^{(n)}_{0t}*\varPhi^{(n)}_{0s}]=\varPhi$，所以由引理就知，可取 $\{n\}$ 的子叙列 $\{n'\}$ 和数列 $\{m_n(s,\ t)\}$ 使得 $\{\varPhi^{(n')}_{st}*\delta(\cdot;\ m_n(s,\ t))\}_n$ 收斂。这子叙列 $\{n'\}$ 的选擇一般是与 $s,\ t(\in S)$ 有关的，但考虑到 S 是可数个，而且应用对角綫的方法，就可以取得所有的 $s,\ t$ 共通适用的子叙列。由引理的后一半，就可得出 $m_n(0,t)=0$。現往証 $m_n(s,t)=0$。为此，只要証 $\{m_n(s,t)\}$ 收斂即可。显然

$$\varPhi^{(n')}_{0s}*[\varPhi^{(n')}_{st}*\delta(\cdot;m_n(s,\ t))]=\varPhi^{(n')}_{0t}*\delta(\cdot;m_n(s,\ t)),$$

而由于可选擇$\{n'\}$左边及右边的$\Phi_{0t}^{(n')}$收斂，故$\{m_n(s,t)\}_n$也非收斂不可。因而$\{\Phi_{st}^{(n')}\}_n$也收斂。若記其极限分布为Φ_{st}，則当$s\leqslant t\leqslant u$时，由$\Phi_{st}^{(n)}*\Phi_{tu}^{(n)}=\Phi_{su}^{(n)}$可得出$\Phi_{st}*\Phi_{tu}=\Phi_{su}$. 因为$\alpha(\Phi_{0t}^{(n)})=0$，所以$\alpha(\Phi_{0t})=0$。又因

$$\delta(\Phi_{0t}^{(n)})\leqslant t\cdot\delta(\Phi)<\delta(\Phi_{0t}^{(n)}*\Phi_{n,t(n,t)}),$$

此处$\Phi_{n,t(n,t)}\subsetneqq U(\varepsilon_n)$，所以$\{\Phi_{n,t(n,t)}\}$趋近于单位分布。故令上面不等式中的$n\to\infty$，就得

$$\delta(\Phi_{0t})\leqslant t\cdot\delta(\Phi)\leqslant\delta(\Phi_{0t}),\quad 即\quad \delta(\Phi_{0t})=t\cdot\delta(\Phi).$$

因而$\Phi=\{\Phi_{s,t};\ s<t,\ s,t\in S\}$滿足(i)，(ii)，(iii)和(iv).

由§6定理2便知，存在可加过程y_t，$t\in S$，而且$y_t-y_s\ (t>s)$的分布为Φ_{st}.（在§6的定理中，t的区域T是区間，但其証明仍然适用于$T=S$的場合）。其次，对任意的$t\in[0,1]$取$t_n\in S$且使$t_n\uparrow t$，則$\{y_{t_n}\}$是可加叙列，又由$\alpha(y_{t_n})=0$及$\delta(y_{t_n})=t_n\delta(\Phi)\leqslant t\delta(\Phi)$，可知$\{y_{t_n}\}$为几乎处处收斂。若令其极限为$x_t$，則$x_t$，$0\leqslant t\leqslant 1$，是可加过程，又因$\alpha(x_t)=0$和$\delta(x_t)=t\delta(\Phi)$（关于$t$連續），所以$x_t$依概率連續。

§17 依概率連續的可分可加过程的构造

如早在§13中討論过的那样，要研究可加过程，只要研究可分可加过程就够了。本节的目的是詳細地考察依概率連續的可分可加过程的构造。由于証明过于复杂，所以从略。

定理1[1] 若令x_t，$t\in[a,b)$，为依概率連續的可分可加过程，則其样本过程具概率为1地为第一种不連續函数。

若对所有的t，$f(t-0)$和$f(t+0)$存在，而且$f(t)$处于这两极限之間，則$f(t)$叫做第一种不連續函数。在(t,u)平面上画出

---

[1] 參見 J. L. Doob: Stochastic Processes, 1953, 第八章定理 7.2.——校者注

$$u=f(t+0)-f(t-0), \qquad a\leqslant t\leqslant b$$

的图象。所謂图象，一般地說，也就是不連續点的集合，它是带状区域 D: $a\leqslant t\leqslant b$, $-\infty<u<\infty$, 的一个子集 $G(f)$. 对 D 的任意 Borel 子集 E,記 $E\cap G(f)$ 中的点的个数为 $N_f(E)$. 若 $E\cap G(f)$ 是无限集合,則不管它的势是怎样,总設 $N_f(E)=\infty$. $N_f(E)$就是图象在 E 中的点的个数。$N_f(E)$ 可以視为 D 上的測度。特别是 E **眞正离开** t 軸(卽距离为正)时,由第一种不連續函数的定义,立卽可以証明 $N_f(E)$ 是有限的。其次,以 $S_f(E)$ 来表示 $E\cap G(f)$ 中的点的 u 坐标的和数。也就是

$$S_f(E)=\sum_{(t,u)\in E\cap G(f)}u=\sum_{(t,f(t+0)-f(t-0))\in E}(f(t+0)-f(t-0))$$

$$=\int_E uN_f(dt\,du).$$

当 E 处在上半平面或者下半平面时，$S_f(E)$ 可以取 $+\infty$ 或 $-\infty$,但当 E 跨及 t 軸的上下时,有时就不能确定。但是,若 E 眞正离开 t 軸时,則 $S_f(E)$ 可以确定,而且其值是有限的。

若 $x_t(\omega)$, $t\in[a,b)$ 是依概率連續的可分可加过程,則其样本过程具概率为 1 地为第一种不連續函数,所以对此可以定义上述的 $N_x(E)$和 $S_x(E)$. 这时它們都与 ω 有关,且是 ω 的可測函数。

定理 2 $N_x(E)$的分布是 Poisson 分布。但此时規定恒等于 ∞ 的隨机变数的分布为 $P(\cdot;\infty)$.

定理 3 若 $E_1, E_2,\cdots$为互不相交,則 $N_x(E_1), N_x(E_2),\cdots$为相互独立,又若設 $E=\sum_n E_n$,則

$$N_x(E)=\sum_n N_x(E_n).$$

以 N 表示隨机变数的系 $\{N_x(E)\}_E$. 由上述二定理可知, N 非常类似于 Poisson 过程。在这种意义下, N 叫做 **Poisson 可加系**。若令 $N_x(E)$ 的均值为 $n(E)$,則 $N_x(E)$的分布为 $P(\cdot;n(E))$. 由 $N_x(E)$ 的可加性便知, $n(E)$ 是 D: $a\leqslant t\leqslant b$, $-\infty<u<\infty$, 上的

測度。因为当 E 真正离开 t 軸时 $N_x(E)$ 恒为有限，所以 $n(E)$ 也是有限的。$n(E)$ 在 E 不离开 t 軸时有可能为 ∞，而其所大到的程度就由下述定理給出。

定理 4 $$\int_{u=-1}^{1}\int_{t=a}^{b} u^2 n(dt\,du) < \infty.$$

令从 a 到 t 的 x_t 的跳跃点中跃度絕对值在 $1/n$ 以上的总和为 $S_n(t)$，卽

$$S_n(t) = \int_{|u|>1/n}\int_{\tau=a}^{t} uN_x(d\tau\,du).$$

这就是可加过程。当 $n\to\infty$ 时，一般地說 $S_n(t)$ 不收斂，但适当地加减一个 t 的函数（与 ω 无关），就可以使之收斂。这就是

定理 5 若設

$$S_n^*(t) = S_n(t) - \int_{|u|>1/n}\int_{\tau=a}^{t} \frac{u}{1+u^2}\,n(d\tau\,du),$$

则当 $n\to\infty$ 时，$S_n^*(t)$ 具概率为 1 地关于 t 一致收斂。若令这极限过程为 $S(t)$，则这也是可加过程，而且 $u=S(t+0)-S(t-0)$ 的图象和 $u=x_{t+0}-x_{t-0}$ 的图象具概率为 1 地是一致的。

由这定理知道，$y_t=x_{t+0}-S(t+0)$ 具概率为 1 地为 t 的連續函数。又有

定理 6 y_t 是可分正态过程，且与上述的 Poisson 可加系 $\boldsymbol{N}=\{N_x(E)\}_E$ 是独立的。

綜合以上所述就得

$$x_{t+0} = y_t + \lim_n \int_{|u|>1/n}\int_{\tau=a}^{t}\left[uN(d\tau\,du) - \frac{u}{1+u^2}\,n(d\tau\,du)\right].$$

§18 无穷可分分布的标准形式

令 Φ 为无穷可分分布。如在 §16 里所証明的那样，Φ 可以看做是某些依概率連續的可加过程 x_t，$0\leqslant t\leqslant 1$，的 x_1 的分布。由

于采用可分修正,就可以假定 x_t 为可分。利用前节的結果便得

$$x_{t+0}=y_t+\lim_n\int_{|u|>1/n}\int_{\tau=a}^{t}\left[uN(d\tau du)-\frac{u}{1+u^2}n(d\tau du)\right].$$

由于 N 是 Poisson 可加系及 (y_t) 是与 N 独立的可分正态过程,若設 $E(y_t)=m(t)$, $V(y_t)=v(t)$,就得

$$E(e^{izx_{t+0}})=\exp\left\{im(t)-\frac{v(t)}{2}z^2\right.$$
$$\left.+\lim_{n\to\infty}\int_{|u|>1/n}\int_{\tau=a}^{t}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(d\tau\, du)\right\},$$

假 $n_t(du)=\int_{\tau=a}^{t}n(d\tau\, du)$,则得

$$E(e^{izx_{t+0}})=\exp\left\{im(t)-\frac{v(t)}{2}z^2\right.$$
$$\left.+\lim_{n\to\infty}\int_{|u|>1/n}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n_t(du)\right\}.$$

在这里,若令 $t=1$,则左边为 $E(e^{izx_1})$,也就是 x_1 的分布 Φ 的特征函数 $\varphi(z)$。記 $m(1)=m$, $v(1)=v$, $n_1(E-\{0\})=n(E)$,于是就有

$$\varphi(z)=\exp\left\{imz-\frac{v}{2}z^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)\right\},\quad (18.1)$$

此处 m 是实数, $v\geqslant 0$, n 是测度,而且

$$n(\{0\})=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{1+u^2}n(du)<\infty.$$

这就是 P. Lévy 关于无穷可分分布的标准形式。反之对于满足上述条件的 m, v, $n(du)$,若以(18.1)来定义 $\varphi(z)$,则这就成为无穷可分分布的特征函数。为了証明(18.1)是特征函数,只須注意到,若令使得 $\varphi(z)=\exp(\psi(z))$ 为特征函数的 $\psi(z)$ 全体为 Ψ,则只要注意下列的事实卽可:

(i) 从正态分布以及 Poisson 分布的特征函数的形状看来,可知 imz, $-\frac{v}{2}z^2$, $\lambda(e^{iz}-1)\in\Psi$,

(ii)　$\psi(z)\in\boldsymbol{\Psi}\Rightarrow\psi(zu)\in\boldsymbol{\Psi}$,

(iii)　$\psi_1(z),\ \psi_2(z),\ \cdots,\ \psi_n(z)\in\boldsymbol{\Psi}\Rightarrow\sum_i\psi_i(z)\in\boldsymbol{\Psi}$,

(iv)　$\psi_n(z)\in\boldsymbol{\Psi},\ \psi_n(z)\to\psi(z)$ (广义一致) $\Rightarrow\psi(z)\in\boldsymbol{\Psi}$.

其次,来証明(18.1)对应着一个无穷可分分布。若在(18.1)中,将 m, v 和 n 各乘以 $1/n$ 而得到的函数記为 $\varphi_n(z)$,則 $\varphi(z)=\varphi_n(z)^n$,又因当 $n\to\infty$ 时 $\varphi_n(z)\to1$(广义一致),所以,若分别令对应于 $\varphi(z)$ 和 $\varphi_n(z)$ 的分布(其存在性在前面已有了証明)为 Φ 和 Φ_n,則

$$\Phi=\Phi_n*\Phi_n*\cdots*\Phi_n\ (n\ 个),\quad \Phi_n\to 单位分布,$$

于是 Φ 是无穷可分的。

这样一来,就可知道 $\varphi(z)$ 为无穷可分分布的特征函数的必要而且充分的条件是: $\varphi(z)$ 能够写成(18.1)的形状。并且还可以証明,在这場合下,(18.1)中的 m, v 和 $n(du)$ 能由分布所唯一确定,但証明在这里从略。

正态分布就是在(18.1)里 $n(du)\equiv0$ 的場合,而 Poisson 分布就是这样的場合: $v=0$, $n(du)$ 的負荷者仅是一点 1 而且 $n(\{1\})=\lambda$, $m=\lambda/2$.

前面証明了无穷可分的分布可以表示为某一个可加过程的增量的分布。不仅如此,而且还可表为对时間齐次的可加过程的增量的分布。实际上,若把 Φ 的特征函数写成(18.1)的形状,而且設 $\varphi(z)=\exp(\psi(z))$,則 $\varphi_t(z)=\exp\{t\psi(z)\}$ 也是特征函数。若令 $\Phi_{st}(0\leqslant s\leqslant t\leqslant1)$为对应于 $\varphi_{t-s}(z)$的分布,則由 $\varphi_t(z)\varphi_s(z)=\varphi_{t+s}(z)$,得出 $\Phi_{st}*\Phi_{tu}=\Phi_{su}(s\leqslant t\leqslant u)$. 因此,存在可加过程 x_t, $0\leqslant t\leqslant1$,使得 $x_t-x_s(t\geqslant s)$ 的分布为 Φ_{st}. 因为 Φ_{st} 仅与 $t-s$ 有关,所以 x_t 是对时間齐次的。

(18.1)又可以写成下述的形状:

$$\varphi(z)=\exp\left\{imz+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}G(du)\right\},\quad(18.2)$$

此处 $G(du)$ 是 R^1 上的有界测度。当 $u=0$ 时，被积函数在 $u=0$ 时是没有意义的，但可以 $u\to 0$ 时的极限为其定义，即为 $-z^2/2$。所以"0"这一点的 G-测度 $G(0)$ 相当于 (18.1) 的 v。(18.2) 是 A. Khinchin 所获得的。

特别是 Φ 的方差 $V(\Phi)$ 为有限时，(18.1) 可以写为

$$\varphi(z)=\exp\left\{imz-\frac{v}{2}z^2+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1-izu)n(du)\right\},\quad \int u^2n(du)<\infty. \tag{18.3}$$

此处的 m 与 (18.1) 中的 m 是不同的，而 $v,n(du)$ 却是相同的。这是 Kolmogoroff 所建立的形式。又当

$$\int_{-1}^{1}|u|n(du)<\infty$$

时，则可以写成

$$\varphi(z)=\exp\left\{imz-\frac{v}{2}z^2+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1)n(du)\right\}. \tag{18.4}$$

这时 v, n 仍与 (18.1) 的那些相同，而 m 就与 (18.1) 的有所不同。

特别若所对应的可加过程仅凭跳跃而变化时，则

$$\varphi(z)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1)n(du)\right\}, \tag{18.5}$$

又若仅凭正的跳跃而变化时，则

$$\varphi(z)=\exp\left\{\int_{0}^{\infty}(e^{izu}-1)n(du)\right\}. \tag{18.6}$$

§ 19 Poisson 过程的各种构成方法

Poisson 过程原先是这样引进的：它是在各瞬間的独立增量加起来的整数值随机过程 x_t，而且还满足

$$P(\Delta x_t=0)=1-\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t),\ P(\Delta x_t=1)=\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t),$$
$$P(\Delta x_t=k)=o(\Delta t),\ k\geqslant 2. \tag{19.1}$$

若对时間不是齐次的，那么以 $\Delta\lambda(t)$ 来代替 $\lambda\cdot\Delta t$ 卽可。例如出租小汽車的司机发生事故的次数，作为第一次近似来說，認为可以由 Poisson 过程来描述。因为在交通量少的时候事故就少，而在上下班时間事故就多，所以对时間不是齐次的。又因在发生事故后的一定时間内是会特加留心的，所以对独立增量的假設也并不符合实际的。若考虑到这些因素，則应有第二近似，但現在不去討論它。

严格地說，所謂独立增量也就是可加过程。故在对时間齐次的場合下，可由(18.6)得

$$\varphi_{ts}(z)=E(e^{iz(x_t-x_s)})=\exp\left\{(t-s)\int_0^\infty(e^{izu}-1)n(du)\right\}.$$

又因跃度是正整数，所以 $n(du)$ 的負荷者是 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 而且

$$\varphi_{st}(z)=\exp\{(t-s)\sum_k(e^{ikz}-1)c_k\},\ \sum_{k=1}^\infty c_k=\int_1^\infty n(du)<\infty,$$

$$=\exp\{1-(\sum_k c_k)(t-s)+(t-s)\sum_k e^{ikz}\cdot c_k+o(t-s)\},$$

因而由(19.1)得 $c_2=c_3=\cdots=0$，且得

$$\varphi_{st}(z)=\exp((t-s)(e^{iz}-1)c_1).$$

这就是說，x_t-x_s 的分布实际就是 Poisson 分布。对时間不齐次的場合也可以做出同样論証。

令 x_t, $t\in[0, \infty)$，为齐次的可分 Poisson 过程。令 $x_t(\omega)$ 的样本过程的增加时刻为 $T_0(\omega)$, $T_0(\omega)+T_1(\omega)$, $T_0(\omega)+T_1(\omega)+T_2(\omega)$, $\cdots$. $T_0(\omega)$, $T_1(\omega)$, $T_2(\omega)$, $\cdots$ 是在 $0, 1, 2, \cdots$ 上的停留时間。每个 $T_0, T_1, T_2, \cdots$ 都具有相同分布（叫做**指数分布** **exponential distribution**），卽

$$P\{\omega/T_n>t\}=e^{-\lambda t},\quad n=0, 1, \cdots,$$

而且是相互独立的。首先，对于 T_0 得

$$P\{\omega/T_0>t\}=P\{\omega/x_t=0\}=e^{-\lambda t}.$$

故 T_0 的分布密度是 $\lambda e^{-\lambda t}dt$. 其次，令 $t_1>t_0$，而求 (T_0, T_1) 的分布。得到

$$P\{\omega/T_0>t_0,\ T_0+T_1>t_1\}=P\{\omega/x_{t_0}=0,\ x_{t_1}=0\text{ 或者 }1\}$$
$$=P\{\omega/x_{t_0}=0,\ x_{t_1}=0\}+P\{\omega/x_{t_0}=0,\ x_{t_1}=1\}$$
$$=e^{-\lambda t_1}+e^{-\lambda t_0}e^{-\lambda(t_1-t_0)}\cdot\lambda(t_1-t_0)$$
$$=e^{-\lambda t_1}[1+\lambda(t_1-t_0)],$$

$$E\{f(T_0,T_1)\}=E\{f(T_0,T_0+T_1-T_0)\}$$
$$=\iint\limits_{t_1>t_0} f(t_0,t_1-t_0)\frac{\partial^2(e^{-\lambda t_1}(1+\lambda(t_1-t_0)))}{\partial t_1\partial t_0}dt_0dt_1$$
$$=\iint\limits_{t_1>t_0} f(t_0,\ t_1-t_0)\lambda^2e^{-\lambda t_1}dt_0dt_1$$
$$=\int_{t_1=0}^{\infty}\int_{t_0=0}^{\infty}f(t_0,\ t_1)\lambda^2e^{-\lambda(t_0+t_1)}dt_0dt_1.$$

故 (T_0, T_1) 的分布密度是 $\lambda e^{-\lambda t_0}\cdot\lambda e^{-\lambda t_1}$. 由此知道，$T_0$ 和 T_1 的分布是相同的指数分布，而且两变数是独立的。对于 $T_0, T_1, \cdots, T_n$ 也是一样的。

利用这种停留时間的关系，就可以用下述方式来构造 Poisson 过程：令 $T_0, T_1, T_2, \cdots$ 为独立随机变数叙列，且設

$$P\{\omega/T_n>t\}=e^{-\lambda t},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

若設

$$x_t=\inf\{n/T_0+T_1+\cdots+T_n>t\},$$

則 x_t 为 Poisson 过程。在下面举出一些实例来説明这种构造方法。

現在假設电灯泡的耐久时間服从指数分布。也就是假設在 t 时間和 $(t+dt)$ 时間之間燒掉的概率为 $\lambda e^{-\lambda t}dt$. 若使用这种电灯泡，且在它燒毁后便立即换上新的，那末，在 t 时間之內燒掉的电灯泡的个数 x_t 就为 Poisson 过程。这种构成法在对时間不齐次的

場合是不能适用的。

另一个有兴趣的构成法是这样的：以服从 Poisson 分布的随机变数 x 和服从 $[0, 1]$ 上的一致分布而且相互独立的随机变数 $y_1, y_2, \cdots$ 为基础。x 与 $y_1, y_2, \cdots$ 也假定是独立的。又令 $[0,t]$ 的示性函数为 $c_t(\xi)$．若設

$$x_t = \sum_{i=1}^{x} c_t(y_i),$$

则 x_t 为 Poisson 过程。实际上，若取 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$，又考虑 $(x_{t_i}-x_{t_{i-1}}, i=1, 2, \cdots, n)$ 的分布时，则得

$$\begin{aligned}
P\{\omega/x_{t_i}-x_{t_{i-1}}=k_i,\ i=1, 2, \cdots, n\} \\
&= P\{\omega/x=\sum k_i,\ \text{在 } y_1, \cdots, y_n \text{ 之中有 } k_i \text{ 个落入 } (t_{i-1}, t_i],\\
&\qquad i=1, 2, \cdots, n\} \\
&= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\ \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}\prod_i (t_i-t_{i-1})^{k_i}, \qquad k=\sum k_i, \\
&= \prod_i e^{-\lambda(t_i-t_{i-1})}\frac{(\lambda(t_i-t_{i-1}))^{k_i}}{k_i!}.
\end{aligned}$$

这就是說，x_t，$0\leqslant t\leqslant 1$，是 Poisson 过程。在对时間不齐次的場合，也可以同样构成。

§20 复合 Poisson 过程

試考虑仅凭跳跃而变化并对时間齐次的可加过程 x_t，$0\leqslant t<\infty$．显然

$$\varphi_{st}(z)\equiv E(e^{iz(x_t-x_s)}) = \exp\left\{(t-s)\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1)n(du)\right\}. \tag{20.1}$$

这时 n 满足

$$\int_{|u|>1} n(du)<\infty, \quad \int_{|u|\leqslant 1}|u|n(du)<\infty. \tag{20.2}$$

此时，高度的絕对値大于某个正数的跳跃，在有限时間内就具概率为 1 地为有限个，但高度接近于 0 的跳跃，一般地說是无限的。但

因跳跃高度的和具概率为1地是絕对收斂的，所以 x_t-x_s 就为跳跃高度的和所确定。若考虑稍比(20.2)为强的条件，而設

$$\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}n(du)<\infty \tag{20.3}$$

时，則在有限时間內的跳跃具概率为1地为有限个。这样的可加过程叫做复合 Poisson 过程。

現在，若設

$$\Phi(du)=\lambda^{-1}n(du),$$

則 Φ 为实数軸上的概率分布。把(20.1)改写一下，就得

$$\varphi_{st}(z)=\exp\left\{\int_s^t\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1)\Phi(du)\cdot\lambda\, d\tau\right\}. \tag{20.1'}$$

由此式可知，在时間 $d\tau$ 之間发生跳跃的概率是

$$\int_{u=-\infty}^{\infty}\Phi(du)\lambda\cdot d\tau=\lambda\cdot d\tau,$$

而其跳跃高度处于 du 內的概率就是 $\Phi(du)\cdot\lambda\cdot d\tau$。故 $\Phi(du)$ 就可以看做跳跃高度的分布。

現在若令 x_t 在 $[0, t]$ 內发生跳跃的次数为 N_t，那末 N_t 就是 Poisson 过程，而且

$$\psi_{st}(z)=E(e^{iz(N_t-N_s)})=\exp\{(t-s)\lambda(e^{iz}-1)\}.$$

同时，x_t 和 N_t 具有相同的跳跃时刻。所以 N_t 的跳跃高度虽然恒等于1，但 x_t 的跳跃高度却随 Φ 而分布。

把 $\varphi_{st}(z)$ 的表示式改写一下，就得

$$\varphi_{st}(z)=e^{-\lambda(t-s)(1-\phi(z))}$$
$$=e^{-\lambda(t-s)}\sum\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}\phi(z)^n,\quad \phi(z)=\int e^{izu}\Phi(du).$$

因此，x_t-x_s 的分布 Φ_{st} 就为

$$\Phi_{st}=\sum_n e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}\Phi^{*n}$$
$$=\sum_n P(n;\lambda(t-s))\cdot\Phi^{*n},\quad \Phi^{*n}=\Phi*\cdots*\Phi\ (n\text{ 个}),$$

从这个观点就可以构成如下的复合 Poisson 过程：令 T_1, T_2, $\cdots$, u_1, u_2, $\cdots$为独立随机变数，且設

$$P\{\omega/T_n>t\}=e^{-\lambda t},\quad P\{\omega/u_n\in du\}=\Phi(du).$$

对此，若定义 x_t 为

$$x_t=u_1+u_2+\cdots+u_n\quad(T_1+\cdots+T_n\leqslant t<T_1+\cdots+T_{n+1}),$$
$$(n=1,2,\cdots),$$

则这就是上述的**复合 Poisson 过程**。此处 T_1, T_2, $\cdots$是到下一个跳跃发生为止的等待时間，而 u_1, u_2, $\cdots$是跳跃的高度。

作为复合 Poisson 过程的例子，可以举出出租小汽車的司机由于事故而造成损失的总計。前面已經說过，事故次数的总計是 Poisson 过程（假設为齐次的），但若再令事故所造成的損失的分布为 Φ，则损失的总計的分布可由(20.1′)給出。

§21 稳定分布和稳定过程

若二个分布 Φ 和 Ψ 可由某个正数 $\lambda>0$ 联結成下述的关系式

$$\Psi(E)=\Phi(\lambda E),\quad \lambda E=\{\lambda\cdot\xi;\xi\in E\},\tag{21.1}$$

则 Φ 和 Ψ 叫做同构。若令 Φ, Ψ 的分布函数和特征函数分别为 F, G 和 φ, ψ，则(21.1)等价于

$$G(x)=F(\lambda x)\tag{21.1′}$$

或者

$$\psi(\lambda z)=\varphi(z).\tag{21.1″}$$

随机变数 X 的分布和 $\lambda\cdot X$ $(\lambda>0)$ 的分布是同构的。均值为 0 的正态分布 $N(\cdot;0,v)$ $(v>0)$和标准正态分布 $N(\cdot;0,1)$ 是同构的。

若与分布 Φ 同构的任意二分布 Φ_1 和 Φ_2 的卷积 $\Phi_1*\Phi_2$ 又与 Φ 同构时，则 Φ 叫做**稳定的** (stable)。若 Φ 是稳定的，则与 Φ 同构的分布也是稳定的。标准正态分布就是稳定的。对稳定的 Φ

的特征函数 $\varphi(z)$，能得到下面的特性：对任意的 $\lambda_1, \lambda_2>0$，存在 $\lambda=\lambda(\lambda_1, \lambda_2)>0$，使得

$$\varphi(\lambda z)=\varphi(\lambda_1 z)\varphi(\lambda_2 z). \tag{21.2}$$

由此可以証明

定理 1 稳定分布是无穷可分的。

事实上，由(21.2)便知存在 $a>0$，使得 $\varphi(az)=\varphi(z)^2$。由此可得

$$\varphi(a^n z)=\varphi(z)^{2^n}. \tag{21.3}$$

若 $a=1$，则 $\varphi(z)=\varphi(z)^2$。故 $\varphi(z)=1$ 或者 0。因为 $\varphi(z)$ 是連續的，而且 $\varphi(0)=1$，所以 $\varphi(z)\equiv 1$。故 Φ 是单位分布，显然是无穷可分的。若 $a<1$，則 $|\varphi(z)|\equiv 1$。这是因为，若有一 z，使得 $|\varphi(z)|<1$，那末在(21.3)中令 $n\to\infty$，就得 $1=0$，因而得出矛盾。由 $|\varphi(z)|\equiv 1$ 得出 $\delta(\Phi)=0$，也就是 Φ 成为 δ 分布。因而也是无穷可分的。若 $a>1$，則在(21.3)中以 z/a^n 代替 z 就得

$$\varphi(z)=\varphi(a^{-n}z)^{2^n}. \tag{21.4}$$

因为 $\varphi(a^{-n}z)$ 也是特征函数，而且当 $n\to\infty$ 时广义一致收斂于 1，所以由(21.4)就显示了 Φ 是无穷可分的。

由上面的定理，可知 $\varphi(z)$ 可以表示为形狀

$$\varphi(z)=e^{\psi(z)},\ \psi(z)=imz-\frac{v}{2}z^2+\int\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(du), \tag{21.5}$$

而(21.2)就变成

$$\psi(\lambda z)=\psi(\lambda_1 z)+\psi(\lambda_2 z). \tag{21.6}$$

由此就得

定理 2

$$\psi(z)=\left(-c_0+i\frac{z}{|z|}c_1\right)|z|^\alpha \quad (c_0\geqslant 0,\ -\infty<c_1<\infty,\ \alpha>0).$$

在 $\psi(z)\equiv 0$ 的場合，設 $c_0=c_1=0$，定理就成立，因此不考虑这个場合。由(21.6)可知，对正的整数 n 存在 $a_n>0$，使得

$$\psi(a_n z)=n\psi(z). \tag{21.7}$$

至于对正的有理数 $r=q/p$ 来說，若設 $a_r=a_n/a_m$，則

$$\psi(a_r z)=r\psi(z). \tag{21.7'}$$

現在往証 a_r 是由 r 而唯一确定的。为此，只要由假設 $\psi(\alpha z)=\psi(\beta z)$，$\alpha>\beta>0$，而引出矛盾就行了。設 $\gamma=\beta/\alpha$，就得 $\psi(z)=\psi(\gamma z)=\psi(\gamma^2 z)=\cdots=\psi(\gamma^n z)\to\psi(0)=0$. 故得 $\psi(z)\equiv 0$，而这就是除外的場合。由 (21.7′) 可知，对正的有理数 r，s 来說，$\psi(a_r a_s z)=r\psi(a_s z)=rs\psi(z)=\psi(a_{rs}z)$. 故 $a_r a_s=a_{rs}$. 又由 (21.7′) 得

$$\psi(z)=r^n\psi(a_r^{-n}z).$$

当 $r\leqslant 1$ 时，若 $a_r>1$，則 $\psi(z)\to\psi(0)=0$，于是得出矛盾。因而若 $r\leqslant 1$，則 $a_r\leqslant 1$. 若 $r\leqslant s$，則 $a_r=a_{r/s}a_s\leqslant a_s$. 故只要 r 在有界区間里变动，a_r 也总是有界的。若 $r\to 1$ 則得 $a_r\to 1$. 这是因为，若令 a_r 的某个子叙列接近于 a，那末由上面的討論便知 a 是有限的。若把 (21.7′) 中的叙列代以这个子叙列，則得其极限 $\psi(az)=\psi(z)$. 故 $a=1$. 由上所述便知，a_r 在有界区間上关于 r 是一致連續的。故若对正的实数 t，定义 $a_t=\lim\limits_{r\to t}a_r$（$r$ 是有理数）时，則得

$$\psi(a_t z)=t\psi(z),\quad a_t a_u=a_{tu},\quad a_t \text{ 为連續。}$$

故由最后的二个条件就得出 $a_t=t^{1/\alpha}$ $(\alpha>0)$ 和

$$\psi(az)=a^{\alpha}\psi(z).$$

因而設 $z=1$ 就得 $\psi(a)=a^{\alpha}\psi(1)$. 并且 $\psi(-a)=\overline{\psi(a)}=a^{\alpha}\overline{\psi(1)}$. 故

$$\psi(z)=|z|^{\alpha}\left(-c_0-ic_1\frac{z}{|z|}\right).$$

因为 $|\varphi(z)|\leqslant 1$，所以 c_0 必須为非負。由于 $\varphi(z)=\exp\psi(z)$ 是无穷可分的分布的特征函数，所以可以定义对时間齐次的可加过程 x_t，$0\leqslant t<\infty$，使得

$$\varphi_{ts}(z)=E(e^{iz(x_s-x_t)})=\exp\{(s-t)\psi(z)\}.$$

若假設 $\psi(z)$ 能够写成(21.5)的形状，则 x_t 从 0 到 t 之間的跳跃高度中属于 du 的个数的均值为 $t\cdot n(du)$。又对正数 a，若令 $y_t=ax_t$，則它也是可加过程，而且

$$\varphi'_{ts}(z)\equiv E(e^{iza(x_s-x_t)})=\exp\{(s-t)\psi(az)\}=\exp\{(s-t)a^{\alpha}\psi(z)\},$$

因此，y_t 从 0 到 t 之間的跳跃高度中属于 du 的个数的均值就为 $t\cdot a^{\alpha}\cdot n(du)$。由于 $y_t=a\cdot x_t$，所以后者又等于 $tn(du/a)$，即 x_t 从 0 到 t 的跳跃高度中属于 du/a 的均值。故

$$n(du/a)=a^{\alpha}\cdot n(du),$$

由此得

$$n_+(x)=\int_x^{\infty}n(du)=\int_1^{\infty}n(x\cdot du)=\int_1^{\infty}x^{-\alpha}n(du)=x^{-\alpha}n_+(1),$$

且有 $n(du)=c\cdot u^{-\alpha-1}du\ (u>0)$，此处 c 为常数。当 $u<0$ 时也可得同样的結果。

这时，可設

$$\begin{aligned} n(du)&=c_+\cdot u^{-\alpha-1}du \qquad (u>0)\\ &=c_-|u|^{-\alpha-1}du \quad (u<0) \qquad (c_\pm\geqslant 0). \end{aligned}$$

对于 α 的限制，則有下述的

定理 3 Φ 是正态分布，此外必須 $0<\alpha<2$。

証明 若 $c_+=c_-=0$，則 Φ 是正态分布。若 c_+ 和 c_- 之中有一个是正的，則由于 $\int_{-1}^{1}u^2n(du)<\infty$ 而必須 $0<\alpha<2$。

将 α 的值分为 $0<\alpha<1$，$1<\alpha<2$ 和 $\alpha=1$ 等三个場合来討論。

(i) $0<\alpha<1$。这时因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}n(du)=\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|u|n(du)<\infty,$$

所以得出

$$\psi(z)=imz-\frac{v}{2}z^2+c_+\int_0^{\infty}(e^{izu}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+c_-\int_{-\infty}^{0}(e^{izu}-1)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}.$$

上式中含有积分的項应为 $O(|z|^\alpha)$（当 $z\to0$ 及 $z\to\infty$ 时）。例如当 $z>0$ 时

$$\int_0^\infty (e^{izu}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}=z^\alpha e^{-\pi i\alpha/2}\int_0^\infty (e^{-v}-1)\frac{dv}{v^{\alpha+1}}\quad (z>0).$$

由于 $\psi(z)=O(|z|^\alpha)$，所以考虑 $z\to\infty$ 时的阶数，必須 $m=v=0$。故

$$\psi(z)=c_+\int_0^\infty (e^{izu}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+c_-\int_{-\infty}^0 (e^{izu}-1)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}.$$

因此，在这个場合下，对应的可加过程 x_t 的样本过程具概率为 1 地是仅凭跳跃而变化的純粹不連續函数。并且除 $c_+=c_-=0$ 的特别情况以外，跳跃的个数具概率为 1 地是无限的。在定理 2 中已經証明 $c_0\geqslant0$，但若 $c_0=0$，則 $|\varphi(z)|=1$，因而 Φ 就成为 δ 分布，并且 $\psi(z)=imz$（m 是常数），但这只有在 $c_1=n=0$ 的場合即 Φ 是单位分布的場合才能成立的（应注意到 $0<\alpha<1$）。又因 $|\varphi(z)|=\exp(-c_0|z|^\alpha)$ $(0<\alpha<1)$，所以 $\varphi(z)$ 既属于 $L_1(R^1)$，又属于 $L_2(R^1)$。故其 Fourier 变式是連續函数。这就表示了与 φ 对应的分布 Φ 是具有連續密度的。旣然样本过程是純粹不連續的，可是分布却又具有連續密度，这倒是有兴趣的現象。这是因为不連續的函数被平均后而变为連續的緣故。

(ii) $1<\alpha<2$。这时

$$\int_{-\infty}^\infty n(du)=\infty,\quad \int_{-\infty}^\infty un(du)=\infty,\quad \int_{|u|>1}|u|n(du)<\infty.$$

因此

$$\psi(z)=imz-\frac{v}{2}z^2+c_+\int_0^\infty (e^{izu}-1-izu)\frac{du}{u^{\alpha+1}}$$
$$+c_-\int_{-\infty}^0 (e^{izu}-1-izu)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}.$$

因为积分項等于 $O(|z|^\alpha)$，所以考虑到 $z\to0$ 及 $z\to\infty$ 时的阶数，就得 $m=v=0$，而且

$$\psi(z)=c_+\int_0^\infty(e^{izu}-1-izu)\frac{du}{u^{\alpha+1}}+c_-\int_{-\infty}^0(e^{izu}-1-izu)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}}.$$

对应的可加过程的跳跃个数以及高度的絕对值之和都具概率为1地为∞. 但是任意取$\beta(>\alpha)$时,跳跃高度的絕对值的β乘冪之和

$$\sum_{0<\tau<t}|x_{\tau+0}-x_{\tau-0}|^\beta$$

却以概率为1地为有限。由于其中高度的絕对值大于1的跳跃是有限的,因此,只要考虑在1以下的絕对值就行了。因为其均值为

$$\int_0^t\int_{-1}^1|u|^\beta\frac{du}{u^{\alpha+1}}d\tau<\infty,$$

所以其本身就是具概率为1地为有限。

(iii) $\alpha=1$. 因为

$$\psi(z)=ic_1z-c_0|z|$$

又

$$\int_{-\infty}^\infty\left(e^{izu}-1-i\frac{zu}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2}=2\int_0^\infty(\cos zu-1)\frac{du}{u^2}=-\pi|z|,$$

所以

$$\psi(z)=ic_1z+\frac{c_0}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\left(e^{izu}-1-i\frac{zu}{1+u^2}\right)\frac{du}{u^2}.$$

这时对应的分布是 Cauchy 分布。因而对应的可加过程叫做 **Cauchy 过程**(Cauchy process)。

如上面得出的可加过程那样,对应于稳定分布的就叫做**稳定过程**(stable process)。(i),(ii)的場合和(iii)的 Cauchy 过程,正态过程(見定理3),以及作为后者的退化的情形而有$x_t=m\cdot t$(m是常数)的場合,等等都是稳定过程。

第3章 平稳过程

§22 平稳过程的定义

所謂平稳过程是指描述对时間的变化保持着平稳性的現象的随机过程。平稳的定义有强弱二种。令 $x_t(\omega)$, $t\in T=(-\infty,\infty)$, 为一随机过程, 且設

$$m(t)=E(x_t),\quad v(t,s)=E((x_t-E(x_t))(x_s-E(x_s))),$$

$$\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E)=P\{\omega/(x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_n})\in E\}.$$

若对任意的 t, s 和 h 均有

$$m(t+h)=m(t),\quad v(t+h,s+h)=v(t,s),$$

則称 x_t **为弱平稳过程** (weakly stationary stochastic process)。此时, $m(t)$ 是常数 (m), 而 $v(t,s)$ 是 $t-s$ 的函数 $(v(t-s))$. 若对任意的 n 和 $\{t_i\}$, 均有

$$\Phi_{t_1+h,t_2+h,\cdots,t_n+h}=\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n},$$

則称 x_t **为强平稳过程** (strongly stationary stochastic process)。

定理1 若 x_t 是强平稳过程,并且 $E(|x_0|^2)<\infty$, 則 x_t, $t\in T$, 亦为弱平稳过程。

証明 由强平稳性可知 $E(|x_t|^2)=E(|x_0|^2)<\infty$. 故 $m(t)$, $v(t,s)$ 皆存在。又因

$$m(t)=\int\xi\Phi_t(d\xi),$$

$$v(t,s)=\iint(\xi-m(t))(\eta-m(s))\Phi_{ts}(d(\xi,\eta)),$$

由此及过程的强平稳性卽可推出弱平稳性。

其逆虽然不一定成立,但对于正态随机过程来說,成立着下述的定理。

定理 2 若正态随机过程 x_t 是弱平稳的，那末它亦为强平稳。

証明 若任意取 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，并設

$$M=(m(t_i)),\quad V=(v(t_i,\ t_j)),$$

则由正态性的假定可知 $\Phi_{t_1\cdots t_n}$ 就是 $N(\cdot;\ M, V)$. 由弱平稳性可知，以 t_i+h 代替 t_i 后 M 和 V 仍不改变，因而 $\Phi_{t_1+h,\ t_2+h,\ \cdots,\ t_n+h}=\Phi_{t_1t_2\cdots t_n}$. 这就是說，$x_t$ 是强平稳的。

若以整数集合 $\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 来代替 $(-\infty, \infty)$，則上述的各种結論仍然成立。这时，x_t 就叫做**平稳叙列**(stationary random sequence)。

在 $x_t(\omega)$ 取复数值的場合 (复随机过程) 下，也可以定义平稳性。其与实値場合的不同之处就在于以

$$v(t,\ s)=E((x_t-m(t))\overline{(x_s-m(s))})\quad (\bar{\xi}=\xi\text{的共轭复数})$$

来代替实値場合的 $v(t,\ s)$. 定理 1 当然仍旧成立。相当于定理 2 的定理也成立，不过为此需要引进复正态分布这一概念 (見 § 27 和 § 28)。以后，若无特别声明时，所謂平稳过程皆指复平稳过程。

§ 23 关于研究平稳过程的准备知識

平稳过程論所用到的知識，簡述如下:

Bochner 定理 这在叙述特征函数的时候已經有了說明，此处以略有不同的形式再叙述一遍。若 $\varphi(t)$ 为一定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的复数值函数且滿足下述条件:

(i) 正定: $\sum\limits_{ij}\varphi(t_i-t_j)\xi_i\bar{\xi}_j\geqslant 0$,

(ii) 連續: 当 $t\to 0$ 时，$\varphi(t)\to\varphi(0)$,

則可以确定一个有界、右連續、非降的函数 $F(\lambda)$，使得

$$\varphi(t)=\int_{R^1}e^{-i2\pi t\lambda}dF(\lambda),\quad F(-\infty)=0.$$

此处，在指数里加上 2π 仅仅是为了方便而已。

Stone 定理❶　設 U_t，$-\infty<t<\infty$，为一族 Hilbert 空間 $\boldsymbol{H}$ 的酉算子，且滿足

(i) 連續：$(U_t f, g)$ 关于 t 連續(或者可測也可以)，

(ii) 群：$U_t U_s = U_{t+s}$，

則 U_t 存在着譜分解

$$U_t = \int e^{-i2\pi\lambda t} dE(\lambda).$$

又若 U 是酉算子，則存在着譜分解

$$U = \int e^{-i2\pi\lambda} dE(\lambda).$$

各态遍历定理 (ergodic theorem)　令 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 为一概率空間，S 为从 Ω 映到 Ω 本身的一对一的保測变換。此处所謂保測 (measure preserving) 是指：若 E 是可測的，則 SE，$S^{-1}E$ 也都可測，而且 $P(SE)=P(S^{-1}E)=P(E)$。这时，就 $f\in L^1(\Omega)$ 来說，对于几乎所有的 ω，有下列等式成立

$$f^*(\omega) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to-\infty}} \frac{1}{n-m}[f(S^{m+1}\omega)+f(S^{m+2}\omega)+\cdots+f(S^n\omega)].$$

并且 $f^*(S\omega)=f^*(\omega)$ (a.e.)。这叫做 G. D. Birkhoff 的**个体各态遍历定理** (individual ergodic theorem)。

假設**广义函数** (distribution) 的理論❷ 已为讀者所知。除了取复数值的普通的广义函数以外，还考虑取值于 Hilbert 空間里的广义函数。其定义与普通的場合是完全一样的。

若令 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 为概率空間，則依照普通的方法，$\boldsymbol{H}=L^2(\Omega)$ 就可以看做 Hilbert 空間。若用 Hilbert 空間的語言来表达概率論在 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 上的概念，于是就可記为

---

❶ 参見关肇直：泛函分析讲义，高教出版社，1958，第三章，§2～§4.——校者注

❷ 例如可参見馮康：广义函数論，数学进展，3(1)，1955，405～590.——校者注

$$E(x) = (x, 1),$$

$$E(x \cdot \bar{y}) = (x, y), \text{ 特别 } E(|x|^2) = \|x\|^2,$$

$$x_n \to x \text{ (平均 2 乘)} \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0.$$

若 $x_t (\in \boldsymbol{H})$ 关于 t 連續（在范数的意义下），又依范数为有界，而且当 $f(t) \in L^1(R^1)$ 时，則在范数收斂的意义下，可以定义 $\int f(t) x_t dt$. 这对 t 的变动范圍是区間的場合也适用。其次，定义

$$I(f) = \int f(t) dy_t .$$

特别重要的就是当 y_t 具有正交增量性 (orthogonal increment) 的場合。即对任意互不相交的区間 $(t_1, t_2]$ 和 $(s_1, s_2]$，$y_{t_2} - y_{t_1}$ 和 $y_{s_2} - y_{s_1}$ 是正交的。这时，就存在单調增加函数 $F(t)$（除去可加常数外为唯一确定），使得

$$F(s) - F(t) = \|y_s - y_t\|^2 \quad (s > t).$$

特别若假定 $F(t)$ 为右連續，則 y_t 也为右連續。由 F 而确定的 Lebesgue-Stieltjes 測度我們仍以同一符号 F 来表示。即

$$F(E) = \int_E dF(t).$$

現往証：对 $f \in L^2(R^1, F)$，可确定上述的 $I(f)$. 首先，若 f 为有界阶梯函数（記其全体为 $\boldsymbol{J}$），則 $I(f)$ 的定义与平常的一样。又因

$$\|I(f)\| = \|f\| \quad (\|f\| \text{ 是 } L^2(R^1, F) \text{ 上的范数}),$$

故可利用普通的方法，将定义在 $\boldsymbol{J}$ 上的算子 $I(f)$ 扩張到 $\bar{\boldsymbol{J}}$ 即 $L^2(R^1, F)$ 上去。这就是所要証明的。易知

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g), \quad (If, Ig) = (f, g).$$

§24 弱平稳过程的譜分解

令 x_t，$-\infty < t < \infty$，为一弱平稳过程，且設

$$E(x_t) = m, \quad E((x_t - m)\overline{(x_s - m)}) = v(t - s). \qquad (24.1)$$

除了 $x_t(\omega)\equiv m$ 这一特殊場合外，$v(0)>0$。所以，可用 $(x_t-m)/\sqrt{v(0)}$ 来代替 x_t，因而不妨假定

$$E(x_t)=0,\ E(x_t\bar{x}_s)=v(t-s),\ E(|x_t|^2)=v(0)=1. \quad (24.1')$$

若将 x_t，$-\infty<t<\infty$，視为 Hilbert 空間 $\boldsymbol{H}=L^2(\Omega)$ 中的曲綫，則由 (24.1′) 可得

$$(x_t,1)=0,\quad (x_t,x_s)=v(t-s),\quad \|x_t\|=1. \quad (24.1'')$$

所以，这曲綫在 $\boldsymbol{H}$ 中既属于 $\{1\}$ 的正交余空間 $\boldsymbol{H}'=\{y/y\perp 1\}$，又位于 $\boldsymbol{H}$ 中的单位球上。而 $v(t-s)$ 就是 $\boldsymbol{H}$ 中二个矢量 x_t 和 x_s 的夹角的余弦。称它为 x_t 和 x_s 的**相关系数**(correlation coefficient)。

更假定 x_t 是**依范数連續的**，即

$$\lim_{t\to s}\|x_t-x_s\|=0. \quad (24.2)$$

这样，由前章的 Poisson 过程的例子就可知道，此时幷不能推出样本过程的連續性，然因

$$P\{\omega/|x_t-x_s|>\varepsilon\}\leqslant\|x_t-x_s\|^2/\varepsilon^2,$$

所以依概率連續性可以由依范数連續性推导出来。

定理 1 (A. Khinchin)　$v(t)$ 具有譜分解

$$v(t)=\int e^{-i2\pi\lambda t}dF(\lambda),\quad F(-\infty)=0. \quad (24.3)$$

此处 $F(\lambda)$ 是由 $v(t)$ 确定的有界、右連續的增加函数。$F(\lambda)$ 叫做 $v(t)$ 的譜函数。

証明　由 $v(t)$ 的定义可知

$$\sum_{ij}v(t_i-t_j)\xi_i\bar{\xi}_j=\|\sum\xi_i x(t_i)\|^2\geqslant 0.$$

又由 (24.2)，得

$$v(t)=(x_t,x_0)\to(x_0,x_0)=v(0)\quad (t\to 0).$$

故由 Bochner 定理就可以定出 F。

定理 2 (A. Kolmogoroff)　x_t 具有譜分解

$$x_t=\int e^{-i2\pi\lambda t}dy_\lambda,\quad y_{-\infty}=0. \quad (24.4)$$

此处的 y_λ 为具有正交增量的过程，而且

$$\|y_\lambda\|^2 = F(\lambda), \tag{24.5}$$

y_λ 由 x_t 而定。

証明 令 $\{x_t\}$ 的綫性組合所构成的綫性流形为 A，并令 $\bar{A}$ 为 H_0. H_0 就是 H_1 的子空間。定义 A 中的变换群 U_t, $-\infty<t<\infty$, 如下：

$$U_t(\sum a_i x_{t_i}) = \sum a_i x_{t_i+t} .$$

为了証明这个定义是有意义的，只要証明

$$\sum a_i x_{t_i} = 0 \Rightarrow \sum a_i x_{t_i+t} = 0$$

就行了，但这由下式卽可推出：

$$\|\sum a_i x_{t_i}\|^2 = \sum a_i \bar{a}_j v(t_i - t_j) = \|\sum a_i x_{t_i+t}\|^2. \tag{24.6}$$

而上式又表明 U_t 是从 A 到 A 上的**等距变换** (isometric transformation)。因此，U_t 可以扩張为从 H_0 到 H_0 的等距变换。又因在 A 中成立着关系式 $U_t U_s = U_{t+s}$，所以在 H_0 上也有这个性质。由于当 $f\in A$ 时 $U_t f$ 关于 t 依范数連續，所以利用 $U_t f$ 的等距性便知，对于 $f\in H_0$ 来說，連續性也成立。故由 Stone 定理就得出 U_t 的譜分解：

$$x_t = U_t x_0 = \int e^{-i2\pi\lambda t} d(E(\lambda) x_0) = \int e^{-i2\pi\lambda t} dy_\lambda.$$

由譜分解的性質便知，y_λ 具有正交增量性，而且

$$G(\lambda) = \|y_\lambda\|^2$$

給出有界增加右連續函数 $G(\lambda)$. 又由譜分解的性質而得

$$v(t) = (x_t, x_0) = \int e^{-i2\pi\lambda t} dG(\lambda), \quad G(-\infty) = 0.$$

以此与(24.3)比較就得 $F=G$，所以(24.5)成立。

其次，若有二个 y_λ 滿足 (24.4)，記其为 y_λ 和 y'_λ，現往証 $y_\lambda = y'_\lambda$. 令 $f\in L^1(R^1)$ 的 Fourier 变换为 $\hat{f}$，則

$$\int \hat{f}(\lambda)\, dy_\lambda = \int \hat{f}(\lambda)\, dy'_\lambda = \int f(t)\, x_t \cdot dt,$$

若 $g(\lambda)$ 为連續且在一有限的区間外为零，則 $g(\lambda)$ 可以由上面的 $\hat{f}(\lambda)$ 来一致逼近，因而

$$\int g(\lambda)\,dy_\lambda=\int g(\lambda)\,dy'_\lambda.$$

若令 $(-\infty,\mu]$ 的示性函数为 $c(\lambda)$，对 $c(\lambda)$ 定出上述的 $g(\lambda)$，使得

$$\int |c(\lambda)-g(\lambda)|^2 dF(\lambda)<\varepsilon^2,$$

于是

$$\left\|\int c(\lambda)\,dy_\lambda-\int g(\lambda)\,dy_\lambda\right\|^2=\int |c(\lambda)-g(\lambda)|^2 dF(\lambda)<\varepsilon^2.$$

同理可得 $$\left\|\int c(\lambda)\,dy'_\lambda-\int g(\lambda)\,dy'_\lambda\right\|^2<\varepsilon^2.$$

由此便有 $$\left\|\int c(\lambda)\,dy_\lambda-\int c(\lambda)\,dy'_\lambda\right\|<\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 就得

$$\int c(\lambda)\,dy_\lambda=\int c(\lambda)\,dy'_\lambda \quad 即 \quad y_\mu=y'_\mu.$$

这样一来定理 2 就被証明了。

例 現在来考虑 $F(\lambda)$ 是純粹不連續的这一特殊情形。将其写成

$$F(\lambda)=\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda} a_n.$$

此处 $\{\lambda_n\}$ 为給定的实数列，$\{a_n\}$ 是正数列，并設 $\sum a_n<\infty$。此时

$$v(t)=\int e^{-i2\pi\lambda t}dF(\lambda)=\sum a_n e^{-i2\pi\lambda_n t}$$

就成为概周期函数，而 x_t 的譜分解可表为下列形式：

$$x_t=\sum y_n e^{-i2\pi\lambda_n t} \quad (此处 \{y_n\} 是正交列，而且 \|y_n\|^2=a_n).$$

事实上，这只須令 $y_n=y_{\lambda_n+0}-y_{\lambda_n-0}$ 就行了。

§25 弱平稳过程的样本过程的譜分解

令 x_t，$-\infty<t<\infty$，为弱平稳过程，又假定满足 (24.1′)，

(24.2)。由 Kolmogoroff 的譜分解定理，就得

$$x_t=\int e^{-i2\pi\lambda t}dy_\lambda,\quad y_{-\infty}=0. \tag{25.1}$$

現在試就样本过程来考察一下这个关系。因为右边的积分是由 $L^2(\Omega)$ 中的范数收斂来定义的，所以，这一关系并不对所有的 ω 皆成立。首先，在条件

$$\|x_t-x_s\|\to 0\ (t\to s),\quad \|y_\lambda-y_\mu\|\to 0\ (\lambda\downarrow\mu), \tag{25.2}$$

之下，可得到下述的定理，其証明从略[1]。

定理 1 对于 x_t 和 y_λ，存在可测的（对二元变量 (t,ω) 或 (λ,ω) 为可测）x_t^* 和 y_λ^*，使 $P\{x_t=x_t^*\}=1$，$t\in T$；$P\{y_\lambda=y_\lambda^*\}=1$，$\lambda\in\Lambda$。

又因在 x_t^* 和 y_λ^* 之間，(25.1) 显然是成立的，故以后不妨就假定 x_t 和 y_λ 是可測的。由关于二元变数 (t,ω)（或者 (λ,ω)）的可测性可知对于几乎所有的 ω，x_t（或者 y_λ）关于 t（或者 λ）是可测的。

$x_t(\omega)$ 对于几乎所有的 ω 来說，是 t 的緩增函数（見广义函数論）。这是因为

$$E\left\{\left(\int\frac{|x_t|}{1+t^2}\,dt\right)^2\right\}\leqslant E\left\{\int\frac{|x_t|^2}{1+t^2}\,dt\int\frac{dt}{1+t^2}\right\}=\left(\int\frac{dt}{1+t^2}\right)^2<\infty.$$

故对于几乎所有的 ω，

$$\int\frac{|x_t(\omega)|}{1+t^2}\,dt<\infty,$$

这就是說，$x_t(\omega)$ 是 t 的緩增广义函数（其实就是緩增函数）。同理

$$E\left\{\left(\int\frac{|y_\lambda|}{1+\lambda^2}\,d\lambda\right)^2\right\}\leqslant E\left\{\int\frac{|y_\lambda|^2}{1+\lambda^2}\,d\lambda\int\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}\right\}$$
$$\leqslant\left(\int\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2<\infty,$$

因而，对于几乎所有的 ω 来說，$y_\lambda(\omega)$ 也是 λ 的緩增（广义）函数。从而作为广义函数的 y_λ 的微分 Dy_λ 也是緩增广义函数。

---

[1] 參見 J. L. Doob: Stochastic Processes. 1953, 61 頁。——校者注

定理2　对于几乎所有的 ω 来說，$x_t(\omega)$，$-\infty<t<\infty$、是广义函数 $Dy_\lambda(\omega)$ 的 Fourier 变换，即

$$x(\phi)=Dy_\lambda(\mathfrak{F}\phi). \tag{25.3}$$

此处

$$\mathfrak{F}\phi(\lambda)=\int e^{-i2\pi\lambda t}\phi(t)\,dt.$$

証明　因为

$$E\left[\int\frac{|x_t(\omega)|^2}{1+t^2}\,dt\right]=\int\frac{1}{1+t^2}\,dt<\infty,$$

所以对于几乎所有的 $\omega(\omega\in\Omega_1,\ P(\Omega_1)=1)$，

$$\int\frac{|x_t(\omega)|^2}{1+t^2}\,dt<\infty.$$

故当 $\omega\in\Omega_1$ 时，若令

$$z_\lambda(\omega)=\int_{-1}^{1}x_t\,\frac{e^{i2\pi\lambda t}-1}{i2\pi t}\,dt+\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\text{❶}\left(\int_1^a+\int_{-a}^{-1}\right)x_t\frac{e^{i2\pi\lambda t}}{i2\pi t}\,dt, \tag{25.4}$$

则得

$$x(\phi)=\mathfrak{F}Dz_\lambda(\phi),\quad \phi\in\mathfrak{D}. \tag{25.5}$$ ❷

这就是說，当 $\omega\in\Omega_1$ 时，x 和 $\mathfrak{F}Dz_\lambda$ 作为 $\mathfrak{D}'$ 中的元素是一致的，又因 $P(\Omega_1)=1$，所以作为 $\mathfrak{D}'_H$，$H=L^2(\Omega)$，的元素，x 和 $\mathfrak{F}Dz_\lambda$ 也是一致的。故在 H 中有

$$x(\phi)=\int\mathfrak{F}\phi(\lambda)\,dy_\lambda=-\int(\mathfrak{F}\phi(\lambda))'y_\lambda d\lambda,$$

$$x(\phi)=\mathfrak{F}Dz_\lambda(\phi)=-\int(\mathfrak{F}\phi(\lambda))'z_\lambda d\lambda.$$

若設 $\phi=\mathfrak{F}^{-1}\psi$，则对任意的急减函数 ψ，

---

❶ l.i.m. 表示均方收斂，即 $\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,f_a(t)=f(t)\Leftrightarrow\lim\limits_{a\to\infty}\int|f_a(t)-f(t)|^2dt=0$.

❷ 公式(25.5)表示对任意的具有限支集的无穷可微函数 $\phi(\lambda)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}x_t\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi\lambda t}\phi(\lambda)\,d\lambda\right)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}Z_\lambda\phi'(\lambda)\,d\lambda,$$

而右边的积分等于

$$-\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi'(\lambda)\left\{\int_{-1}^{1}x_t\,\frac{e^{i2\pi\lambda t}-1}{i2\pi t}\,dt+\left(\int_1^a+\int_{-a}^{-1}\right)x_t\frac{e^{i2\pi\lambda t}}{i2\pi t}\,dt\right\}d\lambda.$$

——俄譯本注

$$\int \psi' y_\lambda d\lambda = \int \psi' z_\lambda d\lambda, \quad \text{故} \quad Dy_\lambda = Dz_\lambda,$$

也就是对于几乎所有的 λ，得出 $y_\lambda = z_\lambda + c$，$c \in \boldsymbol{H}$. 因为在 (25.5) 中可令 $z_\lambda - c$ 来代替 z_λ，所以对于几乎所有的 λ 来說，等式 $y_\lambda = z_\lambda$ 在 $\boldsymbol{H}$ 中成立。再由 (25.4) 可知，对于几乎所有的 λ，可以取 a_n，使得

$$z_\lambda(\omega) = \int_{-1}^{1} \,'' + \lim_{a_n \to \infty} \left(\int_1^{a_n} + \int_{-a_n}^{-1} \right) '' ,$$

又由 $x_t(\omega)$ 对 (t, ω) 的可測性，所以可使 $z_\lambda(\omega)$ 对 (λ, ω) 可測。$y_\lambda(\omega)$ 对 (λ, ω) 也是可測的。又因对于几乎所有的 λ 和对于几乎所有的 ω 来說，$y_\lambda(\omega) = z_\lambda(\omega)$，所以由 Fubini 定理便知，对于几乎所有的 ω 和对于几乎所有的 λ 来說，$y_\lambda(\omega) = z_\lambda(\omega)$. 故 (25.4) 可以写成 $x(\phi) = \mathfrak{F} Dy_\lambda(\phi)$.

若按照 N. Wiener 的样式写，则 (25.3) 变成

$$x_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \underset{a \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-a}^{a} e^{-i2\pi\lambda t} \frac{y_{\lambda+\varepsilon} - y_{\lambda-\varepsilon}}{2\varepsilon} d\lambda. \qquad (25.3')$$

§26 关于强平稳过程的各态遍历定理

令 $x_t(\omega)$，$-\infty < t < \infty$，为可測强平稳过程。假定它的均值存在，于是就有

$$E(|x_t|) = E(|x_0|),$$

因为 $x_t(\omega)$ 关于两元变数 (t, ω) 为可測，所以对于几乎所有的 ω 来說，$x_t(\omega)$ 作为 t 的函数是可測的。又因对于 $-\infty < a < b < \infty$，

$$E\left\{\int_a^b |x_t| dt\right\} = \int_a^b E(|x_t|) dt = E(|x_0|)(b-a) < \infty,$$

所以对于任意給定的有限区間 (a, b) 和对于几乎所有的 ω 来說，

$$\int_a^b |x_t(\omega)| dt < \infty.$$

由于这个积分当 a, b 为整数的場合（这种場合的个数是可数的）

为有限，由此不难推出对于几乎所有的 ω，上述积分对一切的有限区間，均为有限。

定理 1　設 $E(|x_0|)<\infty$，則对于几乎所有的 ω，下列极限存在：

$$x^*(\omega)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}x_t(\omega)dt.$$

称 $x^*(\omega)$ 为**样本平均** (sample mean)。

証明　先証下述的

引理　若 $\{x_n\}$ 是平稳叙列，則当 $E(|x_0|)<\infty$ 时，下列极限对于几乎所有的 ω 皆存在：

$$x^*=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to-\infty}}\frac{1}{n-m}\sum_{k=m+1}^{n}x_k.$$

証明　設 $Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$，由 $R^Z(\boldsymbol{B}^Z)$ 添加上随机矢量 $\boldsymbol{x}=\prod_k x_k$ 的分布 Φ，便得到一个概率空間 $R^Z(\boldsymbol{B}^Z,\Phi)$。若考虑从 R^Z 到它本身的一对一的映照

$$T:\quad \prod_k \xi_k\to\prod_k \xi_{k+1},$$

則这是一个保测变换。若設 f 为由 $\Xi=\prod_k \xi_k\to\xi_0$ 所决定的映照，則 $f\in L^1(R^Z)$。故对于几乎所有(关于 Φ)的 Ξ，下列极限存在：

$$f^*(\Xi)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to-\infty}}\frac{1}{n-m}\sum_{k=m+1}^{n}f(T^k\Xi).$$

从而对于几乎所有的 ω，

$$f^*(x)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to-\infty}}\frac{1}{n-m}\sum_{k=m+1}^{n}x_k.$$

于是引理得証。

現在轉到定理的証明上去。若設

$$y_n=\int_n^{n+1}x_tdt,\quad n=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots,$$

則这是一平稳叙列(由于証明过煩，此处从略)。由上述的引理可知

$$x^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} x_t dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=-n}^{n-1} y_k$$

对于几乎所有的 ω 皆存在。其次，若 $n<A<n+1$，则由

$$\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} x_t dt = \frac{n}{A}\,\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} x_t dt + \frac{1}{2A}\int_{-A}^{-n} x_t dt + \frac{1}{2A}\int_{n}^{A} x_t dt$$

可知，若能証明最后的二項接近于 0 就行了。若对 $|x_t|$，再次应用上面的方法，于是就有

$$\frac{1}{2n}\int_{-(n+1)}^{n+1} |x_t|\,dt = \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{2(n+1)}\int_{-(n+1)}^{n+1} |x_t|\,dt \to |x|^*,$$

$$\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} |x_t|\,dt \to |x|^*,$$

因而它們的差

$$\frac{1}{2n}\int_{-(n+1)}^{-n} |x_t|\,dt + \frac{1}{2n}\int_{n}^{n+1} |x_t|\,dt \to 0,$$

故

$$\left|\frac{1}{2A}\int_{-A}^{-n} x_t dt + \frac{1}{2A}\int_{n}^{A} x_t dt\right| \leqslant \frac{1}{2n}\int_{-(n+1)}^{-n} |x_t|\,dt + \frac{1}{2n}\int_{n}^{n+1} |x_t|\,dt \to 0.$$

若令 $f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 为 n 个变数的 Baire 函数，则

$$y_t = f(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \cdots, x_{t_n+t})$$

也为一可測的强平稳过程。如果

$$E(|y_0|) = E(|f(x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n})|) < \infty,$$

则上述的定理可适用于 y_t，因此极限

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \cdots, x_{t_n+t})\,dt$$

也存在。特别当 $E(|x_0|^2)<\infty$ 时，由于 $E(|x_t\bar{x}_s|)<\infty$，因之极限

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} x_{t+\sigma}\bar{x}_{s+\sigma}\,d\sigma$$

也存在。由此可知下述极限的存在：

$$v^*(t,\ s)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}(x_{t+\sigma}-x^*)\overline{(x_{s+\sigma}-x^*)}d\sigma$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}x_{t+\sigma}\bar{x}_{s+\sigma}d\sigma-|x^*|^2.$$

称 $V^*=(v^*(t,\ s))$ 为样本方差矩陣 (sample variance matrix)。由

$$v^*(t,\ s)=v^*(t-s)$$

及

$$\sum_{i,j}v^*(t_i-t_j)\xi_i\bar{\xi}_j=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}|\sum\xi_i(x_{t_i+\sigma}-x^*)|^2d\sigma\geqslant 0$$

可知 $v^*(t)$ 可以写成

$$v^*(t)=\int e^{-i2\pi\lambda t}dS^*(\lambda)\quad(\text{但 } S^*(-\infty)=0).$$

$S^*(\lambda)$ 叫做样本譜函数 (sample spectral function)。由于

$$E(x^*)=0=E(x_0)$$

及

$$E(v^*(t))=v(t)-E(|x^*|^2)\leqslant v(t),$$

$$E(S^*(\lambda))=F(\lambda)-E(|x^*|^2)H(\lambda)\leqslant F(\lambda)$$

$$(H(\lambda)=0\ \ (\lambda<0),\ =1\ \ (\lambda\geqslant 0)).$$

因此等号的成立必須 $E(|x^*|^2)=0$, 即 $x^*=0$. 由下式可知 $x^*=0$ 与 $F(+0)=F(-0)$ 是等价的,

$$E(|x^*|^2)=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2A}\right)^2\int_{-A}^{A}\int v(t-s)dtds$$

$$=F(+0)-F(-0).$$

如前节所示一样,

$$x_t=\int e^{-i2\pi\lambda t}dy_\lambda=\mathfrak{F}(Dy_\lambda),$$

而由此形式地計算 $v^*(t)$, 就得

$$v^*(t)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\iint e^{-i2\pi[\lambda(t+s)-\mu s]}dsdy_\lambda\overline{dy_\mu}$$

$$=\iint e^{-i2\pi\lambda t}\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}e^{-i2\pi s(\lambda-\mu)}dsdy_\lambda\overline{dy_\mu}$$

$$=\iint e^{-i2\pi\lambda t}\delta_{\lambda\mu}dy_\lambda\overline{dy_\mu},\quad \delta_{\lambda\mu}=\begin{cases}1 & (\lambda=\mu),\\ 0 & (\lambda\neq\mu),\end{cases}$$

$$=\int e^{-i2\pi\lambda t}|dy_\lambda|^2.$$

由此可以設想符号上的关系

$$dS^*(\lambda)=|dy_\lambda|^2.$$

这个有兴趣的事实可以利用 N. Wiener 的一般調和分析来严格地討論。上式的严密的意义就是:对任意有界連續函数 $f(\lambda)$,

$$\int f(\lambda)dS^*(\lambda)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int f(\lambda)\frac{|y_{\lambda+\varepsilon}-y_{\lambda-\varepsilon}|^2}{2\varepsilon}d\lambda$$

成立。

§27 复正态系

我們称 x_α, $\alpha\in A$, 为一实正态系,就是指随机矢量 $x=\prod_\alpha x_\alpha$ 的分布为 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$ 上的正态分布。Wiener 过程以及(实)正态平稳过程就是实正态系。上述的定义等价于:对任意的 $\alpha_\nu\in A$, $z_\nu\in R^1$,

$$E\{\exp(i\sum z_\nu x_{\alpha_\nu})\}=\exp\{i\sum z_\nu m(\alpha_\nu)-\frac{1}{2}\sum z_\mu z_\nu v(\alpha_\mu,\alpha_\nu)\}$$

$$(m(\alpha)=E(x_\alpha),\ v(\alpha,\beta)=E\{(x_\alpha-m(\alpha))(x_\beta-m(\beta))\}).$$

特别当均值为 0 时,就可以写成

$$E\{\exp(i\sum z_\nu x_{\alpha_\nu})\}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\|\sum z_\nu x_{\alpha_\nu}\|^2\right\}$$

$$(\|x\|^2=\int|x(\omega)|^2P(d\omega)).$$

将这个关系式推广到复随机变数系之后,就可得 x_α, $\alpha\in A$, 称为

复正态系，如果对 $\alpha_\nu \in A$，$z_\nu \in C(=R^1+iR^1)$，下式成立

$$E\{\exp(i\,\mathrm{Re}(\sum \bar{z}_\nu x_{\alpha_\nu}))\}=\exp\left\{-\frac{1}{4}\|\sum \bar{z}_\nu x_{\alpha_\nu}\|^2\right\},$$

(Re 表示实部；横表示复共轭。)

特别

$$E\{\exp i\,\mathrm{Re}\,\bar{z}x_\alpha\}=\exp\left\{-\frac{|z|^2}{4}\|x_\alpha\|^2\right\}.$$

在这里，若分别令 x_α 的实部和虚部为 x'_α 和 x''_α，又設 $z=z'+iz''$，則得

$$E\{\exp\{i(z'x'_\alpha+z''x''_\alpha)\}\}=\exp\left\{-\frac{\|x_\alpha\|^2}{4}(z'^2+z''^2)\right\},$$

因而 x'_α 和 x''_α 是相互独立，且具有相同的一維正态分布 $N(\cdot;0,\|x_\alpha\|^2/2)$.

定理1 令 x_α，$\alpha\in A$，为复随机变数系，又設 $Ex_\alpha=0$. 若設

$$v(\alpha,\beta)=E(x_\alpha\bar{x}_\beta)=(x_\alpha,x_\beta), \tag{27.1}$$

則 $(v(\alpha,\beta))$ 是正定的，也就是

$$\sum_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j v(\alpha_i,\alpha_j)\geqslant 0. \tag{27.2}$$

另一方面，若 $(v(\alpha,\beta))$ 是正定的，則存在复正态系 x_α，$\alpha\in A$，使得(27.1)成立。

証明 前一半：

$$\sum_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j v(\alpha_i,\alpha_j)=\|\sum_i\xi_i x_{\alpha_i}\|^2\geqslant 0.$$

后一半：設 $\Omega=C^A=R^{2A}$，又在 $\Omega(\boldsymbol{B}^{2A})$ 里引进如下的(实)正态分布 N：在 R^{2A} 中的那些除在有限坐标以外，其余的坐标为 0 的点的全体記为 R_0^{2A}，显然，它与 C^A 中具有同一性质的点的全体 C_0^A 一致。对 $\boldsymbol{z}(=\prod_\alpha z_\alpha)\in C_0^A$，設

$$\varphi(\boldsymbol{z})=\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta}\bar{z}_\alpha z_\beta v(\alpha,\beta)\right\}.$$

$\sum\limits_{\alpha\beta}$ 在外表上虽然是无限和，但由于 $\boldsymbol{z}\in C_0^A$，因此只不过是有限和，

所以不会发生收敛的問題。为了使得 $\varphi(\boldsymbol{z})$ 是 $R^{2A}(\boldsymbol{B}^{2A})$ 上的某个正态分布 N 的特征函数，只要証明：把 $\sum_{\alpha\beta}$ 看做 $\boldsymbol{z}\in R_0^{2A}$ 的函数时，$\sum_{\alpha\beta}$ 是正定的实二次形式。这可由 $(v(\alpha,\beta))$ 的正定性得出。事实上，由于正定性的假定得出 $v(\alpha,\beta)=\overline{v(\beta,\alpha)}$，所以由此便知 $\sum_{\alpha\beta}$ 是 $\boldsymbol{z}\in R^{2A}$ 的实二次形式。而它的正定性由 (27.2) 卽可推出。若令 $\Omega(\boldsymbol{B}^{2A},N)$ 为基本的概率空間，又对 $\omega\in\Omega=C^A$ 令 $x_\alpha(\omega)$ 为 ω 的 α 坐标(复数)，则对 $\boldsymbol{z}=\prod_\alpha z_\alpha\in C_0^A$ 得

$$E\{e^{i\operatorname{Re}\sum_\alpha \bar{z}_\alpha x_\alpha}\}=E(e^{i\sum_\alpha(z'_\alpha x'_\alpha+z''_\alpha x''_\alpha)}\}=\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta}\bar{z}_\alpha z_\beta v(\alpha,\beta)\right\}$$

$$(z_\alpha=z'_\alpha+iz''_\alpha,\ x_\alpha=x'_\alpha+ix''_\alpha).$$

以 $t\cdot z_\alpha$ 代替 z_α 便得

$$E\{e^{it\operatorname{Re}\sum_\alpha \bar{z}_\alpha x_\alpha}\}=\exp\left\{-\frac{t^2}{4}\sum_{\alpha\beta}z_\alpha\bar{z}_\beta v(\alpha,\beta)\right\}.$$

若两边对 t 微分两次，然后再設 $t=0$，则得

$$\frac{1}{4}\sum_\alpha \bar{z}_\alpha^2E(x_\alpha^2)+\frac{1}{4}\sum_\alpha z_\alpha^2E(\bar{x}_\alpha^2)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\bar{z}_\alpha z_\beta(x_\alpha,x_\beta)$$
$$=\sum_{\alpha\beta}\bar{z}_\alpha z_\beta v(\alpha,\beta).$$

因此

$$E(x_\alpha^2)=0,\ (x_\alpha,x_\beta)=v(\alpha,\beta).$$

从而

$$E\{e^{i\operatorname{Re}\sum_\alpha \bar{z}_\alpha x_\alpha}\}=\exp\left\{-\frac{1}{4}\|\sum\bar{z}_\alpha x_\alpha\|^2\right\}.$$

注意 $E(x_\alpha^2)=0$ 是作为副产品而获得的，但这是一个值得注意的性質。事实上，若設 $x_\alpha=x'_\alpha+ix''_\alpha$，則如同前面已被注意到的那样，$x'_\alpha$ 和 x''_α 为相互独立而且具有相同的分布 $N(\cdot;0,\|x_\alpha\|^2/2)$，因而

$$E(x_\alpha^2)=E(x_\alpha'^2)-E(x_\alpha''^2)+2iE(x'_\alpha)E(x''_\alpha)=0.$$

定理 2 若 x_α，$\alpha\in A$，是复正态系，并且是相互正交的，則必为相互独立。

証明

$$E(e^{i\mathrm{Re}\sum \bar{z}_\alpha x_\alpha}) = \exp\left\{-\frac{1}{4}\|\sum \bar{z}_\alpha x_\alpha\|^2\right\}$$

由正交性

$$= \exp\left\{-\frac{1}{4}\sum |z_\alpha|^2 \|x_\alpha\|^2\right\}$$

$$= \prod_\alpha \exp\left\{-\frac{1}{4}|z_\alpha|^2\|x_\alpha\|^2\right\}$$

$$= \prod_\alpha E(e^{i\mathrm{Re}\bar{z}_\alpha x_\alpha}).$$

由此可知 $x=\prod_\alpha x_\alpha$ 的分布是各个 x_α 的分布的直积。

定理3 令 x_α, $\alpha\in A$, 为复正态系，则 $\mathrm{Re}(x_\alpha)$, $\alpha\in A$, 和 $\mathrm{Im}(x_\alpha)$, $\alpha\in A$, (Im 是虚部)都是实正态系。

只須在(27.1)中，設 $\mathrm{Im}(z_\nu)$ 或者 $\mathrm{Re}(z_\nu)=0$ 卽可得証。又由定义不难証明下述的

定理4 若令 x_α, $\alpha\in A$ 和 y_α, $\alpha\in A$, 都是实正态系，又令两系为相互独立，则 $x_\alpha+iy_\alpha$, $\alpha\in A$, 是复正态系。

定理5 若 x_α, $\alpha\in A$, 是复正态系，且設每一 y_β, $\beta\in B$, 是 x_α, $\alpha\in A$, 的复系数的綫性組合或者是这种綫性組合依范数的极限，则 y_β, $\beta\in B$, 也是正态系。

例 复 Wiener 过程 (complex Wiener process) 若 x_t, $-\infty<t<\infty$, 是复正态系，而且具有正交增量：

$$对\ t<s\leqslant u<v,\quad (x_s-x_t,\ x_v-x_u)=0,$$

则 x_t, $-\infty<t<\infty$, 就叫做复 Wiener 过程。这时根据定理5可知，对于 $t_1<s_1\leqslant t_2<s_2\leqslant\cdots\leqslant t_n<s_n$, $x_{s_i}-x_{t_i}$, $i=1, 2, \cdots, n$ 也是复 Wiener 过程，而且是相互正交的，从而由定理2可知是独立的。因而它是一个复可加过程。x_s-x_t 的分布对于环繞着复平面上的原点的旋轉是不变的分布。因为 $s<t<u$ 時 $(x_u-x_t,\ x_t-x_s)=0$; 所以

$$\|x_u-x_s\|^2=\|x_u-x_t\|^2+\|x_t-x_s\|^2,$$

而且除去一附加常数以外，可以唯一决定一个增函数 $F(t)$，使得

$$\|x_t-x_s\|^2=F(t)-F(s).$$

特别，若 $F(t)$ 是右連續，則 x_t 也在范数的意义下为右連續。我們还可以証明下述的逆命题：对任一給定的增函数 $F(t)$，必存在一复 Wiener 过程 x_t，使得 $\|x_t-x_s\|^2=F(t)-F(s)$. 証明如次：以 A 表示实数区間 $(a, b]$，$-\infty<a<b<\infty$，的全体。若对 $\alpha, \beta\in A$，定义

$$v(\alpha, \beta)=\begin{cases}F\text{ 在区間 }\alpha\cap\beta\text{ 上的增量 }(\alpha\cap\beta\neq\emptyset\text{ 即 }\alpha\cap\beta=\text{区間}),\\ 0 \qquad (\alpha\cap\beta=\emptyset),\end{cases}$$

則 $(v(\alpha, \beta))$ 是正定的。事实上，若令 α 的示性函数为 $c(t, \alpha)$，則

$$\sum_{ij}\bar{\xi}_i\xi_j v(\alpha_i, \alpha_j)=\sum_{ij}\bar{\xi}_i\xi_j\int c(t, \alpha_i)c(t, \alpha_j)\,dF(t)\ (\text{Riemann-}$$

$$\text{Stieltjes 积分})=\int\left|\sum_i c(t, \alpha_i)\bar{\xi}_i\right|^2 dF(t)\geqslant 0.$$

故存在复正态系 $\{x_\alpha\}$，使得

$$(x_\alpha, x_\beta)=v(\alpha, \beta).$$

若 $t<s<u$，則

$$\begin{aligned}&\|x_{(t,s]}+x_{(s,u]}-x_{(t,u]}\|^2\\ &=F(s)-F(t)+F(u)-F(s)+F(u)-F(t)\\ &\qquad -2(F(s)-F(t))-2(F(u)-F(s))\\ &=0,\end{aligned}$$

因而

$$x_{(t,s]}+x_{(s,u]}=x_{(t,u]}\ (\text{a. e.}).$$

故若令 $a<\min(0, t)$，且設

$$x_t=x_{(a,t]}-x_{(a,0]},$$

則 x_t 与 a 的选擇无关（除概率为 0 以外），于是 x_t，$-\infty<t<\infty$，就是所求的复 Wiener 过程。

特别在 $F(t)=t$ 时，卽过程对时間是齐次的，Wiener 把这种

过程叫做 Brown 运动。

§28 正态平稳过程

复正态系 x_t, $-\infty<t<\infty$, 是弱平稳过程时，就称它为**复正态弱平稳过程**。对应于 §22 的定理 2，就有

定理 1 复正态弱平稳过程是强平稳的。

証明 令 x_t, $-\infty<t<\infty$, 为复正态弱平稳过程。对任意的 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和 h,

$$E\{e^{i\mathrm{Re}(\Sigma\bar{z}_\nu x_{t_\nu})}\}=\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum\bar{z}_\mu z_\nu(x_{t_\mu}, x_{t_\nu})\right\}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{4}\sum\bar{z}_\mu z_\nu v(t_\mu-t_\nu)\right\}, (x_t, x_s)=v(t-s)$$

$$=E\{e^{i\mathrm{Re}(\Sigma\bar{z}_\nu x_{t_\nu+h})}\}.$$

故 (x_{t_ν}) 的分布与 $(x_{t_\nu+h})$ 的分布相等，于是 (x_t) 就成为强平稳的。

由这定理可知，只提**复正态平稳过程**就够了。又因为通常我們总是假定平稳过程是复的，所以簡称它为**正态平稳过程**。

在前面已經証明：由 Khinchin 定理，$v(t)=(x_{s+t}, x_s)$ 的譜分解是可能的。但沒有指明对这样的函数 $v(t)$，是否存在平稳过程 (x_t)，使得 $(x_t, x_s)=v(t-s)$。事实上，这是存在的，甚至存在滿足这个条件的正态平稳过程。

定理 2 若令 $v(t)=\int e^{-i2\pi\lambda t}dF(\lambda)$, $F(\lambda)$ 是有界右連續的增函数，則存在正态平稳过程 x_t, $-\infty<t<\infty$, 使得

$$(x_t, x_s)=v(t-s).$$

証明 因对任意的 t_μ, ξ_μ,

$$\sum\bar{\xi}_\mu\xi_\nu v(t_\mu-t_\nu)=\int|\sum\bar{\xi}_\mu e^{-i2\pi t_\mu\lambda}|^2dF(\lambda)\geqslant 0,$$

所以由前节定理 1 立即知道 (x_t) 的存在。

其次考虑 x_t 的 (Kolmogoroff 的) 譜分解：

$$x_t = \int e^{-i2\pi t\lambda} dy_\lambda.$$

由于 y_λ 属于由 x_t 所張成的 Hilbert 空間 H_0，所以由前节定理 5 便知 y_λ，$-\infty<\lambda<\infty$，也是复正态系。又因 y_λ，$-\infty<\lambda<\infty$，具有正交增量，所以是复 Wiener 过程。利用 Khinchin 的譜函数 F，就得

$$\|y_\lambda - y_\mu\|^2 = F(\lambda) - F(\mu) \quad (\lambda>\mu).$$

y_λ 不一定是齐次的。故得

定理 3　正态平稳过程就是复 Wiener 过程的微分(广义函数的意义下)的 Fourier 变换。

§29 Wiener 积分，多重 Wiener 积分

令 x_t，$-\infty<t<\infty$，为一复 Wiener 过程，又設

$$\|x_t - x_s\|^2 = F(t) - F(s) \quad (t>s).$$

因为 x_t 具有正交增量，所以由 §23 可知，此时可定义形狀为

$$I(f) = \int f(t)\,dx_t,\ \ f\in L^2(R^1, dF)$$

的积分。若 (x_t) 是复 Wiener 过程，則特别称此积分为 **Wiener 积分**。其次，在这种場合下，虽可定义下述形狀的**多重 Wiener 积分**:

$$I_{p,q}(f) = \int\cdots\int f(t_1, \cdots, t_p, s_1, \cdots, s_q)\,dx_{t_1}\cdots dx_{t_p} d\bar{x}_{s_1}\cdots d\bar{x}_{s_q},$$

但为此必須假定 $F(t)$ 是連續的。此处不来討論它的詳細的証明，而只就 $p=2$, $q=0$ 的場合:

$$I(f) = I_{2,0}(f) = \iint f(t_1, t_2)\,dx_{t_1} dx_{t_2}$$

来說明一下証明的要点。首先，在 f 是与对角綫无共通点的二維区間 $(a, b]\times(c, d]$ 的示性函数时，定义

$$I(f)=(x_b-x_a)(x_d-x_c).$$

在这里，与对角綫无共通点的条件（姑且叫做条件 $\boldsymbol{A}$）是重要的。若 f 是上述那样的示性函数的綫性組合（記其全体为 S），則定义它为上面那种 $I(f)$ 的綫性組合。显然 I 是从 S 到 $\boldsymbol{H}=L^2(\Omega)$ 中的綫性算子。利用条件 A 就得

$$\|I(f)\|^2\leqslant\|f\|^2\equiv\iint|f(t_1,t_2)|^2dF(t_1)dF(t_2).$$

特别若 $f(t_1,t_2)$ 关于 (t_1,t_2) 为对称，則上式的不等号变为等号，又若 f,g 都对称，則得

$$(If,Ig)=(f,g).$$

又由 F 的連續性，得 $\bar{S}=L^2\equiv L^2(R^2,(dF)^2)$，因而可以把 $I(f)$ 推广到 L^2 上去。

对于一般的 $I_{p,q}(f)$ 也可以同样定义。令 $I_{p,q}(f)$ 的象的全体为 $\boldsymbol{H}_{p,q}$。特别令 $\boldsymbol{H}_{00}$ 为 $L^2(\Omega)$ 中的常数的全体所形成的一維空間。由于条件 A 的作用，于是 $\{\boldsymbol{H}_{p,q}\}_{p,q}$ 就成为相互正交的 $\boldsymbol{H}$ 的子空間。其次，若令 $\boldsymbol{H}^*$ 为关于 x_t，$-\infty<t<\infty$，可测而且 $E(|x|^2)<\infty$ 的复数值（随机变数）x 的全体，則可以証明 $\boldsymbol{H}^*$ 是 $\boldsymbol{H}_{p,q}$ 的直接和。因此，可将 $x\in\boldsymbol{H}^*$ 展为直交和

$$x=\sum_{p,q}I_{p,q}(f_{p,q}).$$

故可将 $f_{p,q}(t_1,\cdots,t_p,s_1,\cdots,s_q)$ 取为分别关于 $(t_1,\cdots,t_p)$ $(s_1,\cdots,s_q)$ 的各組为对称的函数。此时，这些函数可由 x 唯一地确定。

例1 若令 x_t，$-\infty<t<\infty$，为对时間齐次的复 Wiener 过程，又設

$$y_t=\int f(t+s)\,dx_s,\quad f\in L^2(R^1),$$

則 y_t 是正态平稳过程。事实上，

$$(y_t,y_u)=\int f(t+s)\overline{f(u+s)}\,ds=\int f(t-u+s)\overline{f(s)}\,ds,$$

因而(y_t, y_u)是$t-u$的函数，于是得出平稳性。至于正态性，则由y_t是x_s的綫性組合的极限这一事实即得到説明。現在若令f的逆 Fourier 变换为$\hat{f}$，则得

$$(y_t, y_u)=\int e^{-i2\pi(t-u)\lambda}|\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

故$|\hat{f}(\lambda)|^2$是譜函数的微分系数。

例 2 依照与上述一样的方法，利用多重 Wiener 积分，若令

$$z_t=\iint f_2(t_1+t, t_2+t)dx_{t_1}dx_{t_2}+\int f_1(t_1+t)dx_{t_1},$$

则z_t是一强平稳过程，但除$f_2\equiv 0$的情形以外，并不具有正态性。进一步利用更高維数的多重 Wiener 积分，以及它的极限所得到的仍然是强平稳过程。但考察一下是否能利用这种方法来构成一般的强平稳过程，这将是一个有意义的問題。

§30 正态平稳过程的各态遍历性❶

首先来給出强平稳过程x_t, $-\infty<t<\infty$，的各态遍历性和强混合性的定义。若令x是关于x_t, $-\infty<t<\infty$，为可測的随机变数，则可以写成

$$f_n(x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})\to x\ (\text{依概率收斂})。\qquad (30.1)$$

此处f_n是n个复变数的 Baire 函数。由强平稳性得

$$\begin{aligned}P\{\omega/|f_n(x_{t_1+t}, \cdots, x_{t_n+t})-f_m(x_{t_1+t}, \cdots, x_{t_m+t})|>\varepsilon\}\\=P\{\omega/|f_n(x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})-f_m(x_{t_1}, \cdots, x_{t_m})|>\varepsilon\}\\\to 0\quad (m, n\to\infty),\end{aligned}$$

所以$f_n(x_{t_1+t}, \cdots, x_{t_n+t})$, $n=1, 2, \cdots$，依概率收斂于某个随机变数x'. x'以概率为 1 地仅由x和t决定，并且与(30.1)的叙列的选择无关。記$x'=T_t x$，于是就有

$$T_{t+s}x=T_tT_sx\,(\text{a. e.}).\qquad (30.2)$$

❶ 或称遍历性。——校者注

若对所有的 t, $T_t x = x$ 时，则 x 叫做**不变的**。$x\equiv$常数就是不变的，若除此以外不再存在不变的 x 时，x_t, $-\infty<t<\infty$, 就叫做**具有各态遍历性** (ergodic)。若有一不变的 x，考虑其截口 $x^{(M)}(x^{(M)}(\omega)=x(\omega)(|x(\omega)|\leqslant M)$, $=0(|x(\omega)|>M))$，它显然也是不变的。若 x 不是常数，则可取 M 足够大，使得 $x^{(M)}$ 也不是常数，因而若除去常数外不存在有界不变的 x，则过程就具有各态遍历性。其次，对于依范数有界且关于 x_t, $-\infty<t<\infty$, 可测的任意 x 与 y, 都有

$$E(T_t x\cdot \bar{y})\to E(x)E(\bar{y}) \quad 即 \quad (T_t x, y)\to(x, 1)(1, y)$$

时，则称 x_t, $-\infty<t<\infty$, 为**具有强混合性** (strongly mixing)。强混合性的条件要比各态遍历性来得强。其原因是：若令 $T_t x = x$, 则由强混合性得

$$E(x^2)=E(T_t x\cdot x)\to E(x)^2,$$

因此 $V(x)=E(x^2)-E(x)^2=0$, 于是 $x=$常数。

有了上面这些准备，可以来証明下面的定理。

定理 1 (G. Maruyama) 欲使正态平稳过程具有各态遍历性，它的必要而且充分的条件是譜函数 $F(\lambda)$ 为連續。

定理 2 欲使正态平稳过程具有强混合性，它的必要而且充分的条件是 $v(t)\to 0 \quad (t\to\infty)$.

令 x_t, $-\infty<t<\infty$, 为正态平稳过程，且令 $F(\lambda)$ 在 $\lambda=\mu$ 处有跳跃。令 x_t 的 (Kolmogoroff 的) 譜分解为

$$x_t=\int e^{-i2\pi\lambda t}dy_\lambda,$$

如果沿用証明前一定理时所采用的 U_t, $E(\lambda)$ 等記号，那末 $y_\lambda=E(\lambda)\cdot x_0$ 也在 $\lambda=\mu$ 处有跳跃，而且它的跃度 $z=y_{\mu+0}-y_{\mu-0}$ 满足 $U_t z=e^{-i2\pi\mu t}z$. 因为 T_t 是 U_t 的推广，所以 $T_t z=e^{-i2\pi\mu t}z$. 由 T_t 的定义可得 $|T_t z|=T_t|z|$, 故 $T_t|z|=|z|$. 即 $|z|$ 是不变的。又因 z 的分布是在复平面上旋轉不变的正态分布，且由于 $\|z\|^2=F(\mu+0)$

$-F(\mu-0)>0$，所以不是 δ 分布，从而 $|z|$ 不是常数。由此就証明了定理 1 中的必要性。其次往証充分性。令 x 为有界不变。因为关于 y_λ，$-\infty<\lambda<\infty$，可测的全体和关于 x_t，$-\infty<t<\infty$，可测的全体是一致的，所以 x 关于 y_λ，$-\infty<\lambda<\infty$，是可测的，又因 $\|x\|^2<\infty$，所以由前节的結果而得

$$x=\text{常数}+\sum_{p+q>0}\int\cdots\int f_{pq}(\lambda_1\cdots\lambda_p,\ \mu_1\cdots\mu_q)\,dy_{\lambda_1}\cdots dy_{\lambda_p}d\bar{y}_{\mu_1}\cdots d\bar{y}_{\mu_q}. \tag{30.3}$$

假設 $f_{p,q}$ 分别对 $(\lambda_i)(\mu_j)$ 为对称。为了求 T_tx，只要令 $dy_{\lambda_1}\cdots$ 为 $T_tdy_{\lambda_1}\cdots$ 就可以了，又因 $T_tdy_\lambda=e^{-i2\pi\lambda t}dy_\lambda$，$T_td\bar{y}_\mu=e^{i2\pi\mu t}d\bar{y}_\mu$（这是形式上的說法，严密地說，就要稍长一些，但由此不难充分領会它的意思），所以

$$T_tx=\text{常数}+\sum_{p+q>0}\int\cdots\int f_{pq}(\lambda_1\cdots\lambda_p,\mu_1\cdots\mu_q)\,e^{-i2\pi t(\Sigma\lambda_\kappa-\Sigma\mu_\rho)}dy_{\lambda_1}\cdots d\bar{y}_{\mu_q}. \tag{30.4}$$

因被积函数分别对 $(\lambda_\kappa)(\mu_\rho)$ 为对称，所以由 $T_tx=x$ 可得

$$f_{pq}(\lambda_1\cdots\lambda_p,\ \mu_1\cdots\mu_q)\,e^{-i2\pi t(\Sigma\lambda_\kappa-\Sigma\mu_\rho)}=f_{pq}(\lambda_1\cdots\lambda_p,\ \mu_1\cdots\mu_q).$$

故在超平面 Π：$\sum\lambda_\kappa-\sum\mu_\rho=0$ 之外 $f_{pq}=0$. 又由 F 的連續性得

$$\int_\Pi dF(\lambda_1)\cdots dF(\lambda_p)dF(\mu_1)\cdots dF(\mu_q)=0,$$

所以 $f_{pq}=0$(a. e.)。故得出 $x=$常数。

現在轉到定理 2 的証明上去。若具有强混合性，則 $v(t)=(x_t,\ x_0)=(T_tx_0,\ x_0)\to(x_0,\ 1)^2=0$. 其次，假定 $v(t)\to0$. 由此可知 $F(\lambda)$ 必連續。故关于 x_t，$-\infty<t<\infty$，可測且依范数有界的 x，y 可写成(30.3)的形状，再利用前节所述 H_{pq} 的正交性就得

$$(T_tx,\ y)=(x,\ 1)(1,\ y)+\sum_{p+q>0}\int\cdots\int f_{pq}(\cdots)\bar{g}_{pq}(\cdots)\cdot e^{-i2\pi t(\Sigma\lambda_\kappa-\Sigma\mu_\rho)}\,dF(\lambda_1)\cdots dF(\mu_q). \tag{30.5}$$

再由 $v(t)\to0$ 可得

$$\left|\int_a^b e^{-i2\pi t\lambda}dF(\lambda)\right| \leqslant |v(t)| + \int_b^{\infty} dF(\lambda) + \int_{-\infty}^{-a} dF(\lambda) \to 0 ❶.$$

若以区間的特征函数的綫性組合来逼近 f_{pq} 和 g_{pq}❶，則(30.5)中的 $\sum$ 内的各項收斂于0。故若 x, y 的展式只有有限項时，就得 $(T_t x, y) \to (x, 1)(1, y)$. 用这些 x, y 依范数逼近一般的 x, y，就可以証明同样的結論。这时必須注意到 $\|T_t x\| = \|x\|$.

例 因为正态平稳过程 x_t 是强平稳过程，又因 $E(|x_0|) < \infty$，所以样本平均：

$$x^* = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} x_t dt$$

存在。显然 $T_t x^* = x^*$，所以若 $F(\lambda)$ 为連續，則由定理1得出 $x^* =$ 常数。故 $x^* = E(x^*) = E(x_0)$. 这就是用样本过程来求 $E(x_0)$ 的公式。同样的事情也可以适用于 $v(t)$.

§31 平稳过程的普遍化

首先叙述平稳叙列。这虽然不应叫做普遍化，但順便叙述一下。关于随机叙列 $x_n, n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$，的弱平稳性、强平稳性和正态性的定义与平稳过程的場合相同。又在正态平稳叙列里沒有必要区别强平稳和弱平稳，这也与以前一样。若假定 $E(x_n) = 0$，則 $v(n) = (x_{n+m}, x_m)$ 的 (Khinchin 的)譜分解为

$$v(n) = \int_0^1 e^{-i2\pi\lambda n} dF(\lambda), \tag{31.1}$$

而 dF 就是 $R^1/\mathrm{mod}\,1$ 上的測度。又 x_n 的 (Kolmogoroff 的) 譜分

---

❶ 这一結論是錯誤的，因为第二項与第三項不趋于零。不用区間的特征函数的綫性組合，而用光滑有限函数的乘积 $\phi(\lambda)$ 的綫性組合来逼近 f_{pq} 和 g_{pq}，就能改正这一証明。对函数 $\phi(\lambda)$，它的 Fourier 变换 $\mathfrak{F}\phi(\lambda)$ 在 $t\to\infty$ 时迅速减小，因而

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\lambda t}\phi(\lambda)dF(\lambda) = v(t) * \mathfrak{F}\phi(t) \to 0.$$

——俄譯本注

解为

$$x_n=\int_0^1 e^{-i2\pi\lambda n}dy_\lambda, \quad \|dy_\lambda\|^2=dF(\lambda). \tag{31.2}$$

由此可知，平稳过程的性质几乎全部保持，而且以更簡单的形态出現于平稳叙列。

平稳广义过程 (stationary random distribution) 随机过程 $x_t(\omega)$ 可以考虑为以 ω 作为輔助变数的 t 的函数，但是如果所考虑的以 ω 作为輔助变数的 t 的函数为广义函数，则就可以考虑所謂**广义随机过程** (random distribution)。广义随机过程也可以分为强弱两种来考虑。令 $\mathfrak{D}$ 为无限可微而且支集为有界的 t 的函数的全体，再令广义函数的全体为 $\mathfrak{D}'$. 若有 $\phi\in\mathfrak{D}$ 和 ω 的函数 $x(\phi, \omega)$，使得对 ω 的所有的值(或者几乎所有的值)，把 $x(\phi, \omega)$ 看做 ϕ 的函数时它属于 $\mathfrak{D}'$，且对任意給定的 ϕ, $x(\phi, \omega)$ 是 ω 的可测函数时，$x(\phi, \omega)$ 就叫做**强义的广义过程**。反之，若对任意給定的 ϕ，把 $x(\phi, \omega)$ 看做 ω 的函数而属于 $H=L^2(\Omega)$，又映照

$$x: \mathfrak{D}\ni\phi\to x(\phi, \cdot)\in H$$

为取值于 H 的广义函数时，即 $x\in\mathfrak{D}'_H$ 时，$x(\phi, \omega)$ 就叫做**弱义的广义过程**。特别，若强义的广义过程滿足**强义的平稳性**：

"$(x(\phi_1), \cdots, x(\phi_n))$ 的分布和 $(x(\phi_1^{(h)}), \cdots, x(\phi_n^{(h)}))$ 的分布恒为相同" $\quad (\phi^{(h)}(t)=\phi(t+h))$, (31.3)

则叫做**强平稳广义过程**。設 $x_t(\omega)$ 为一可測的强平稳过程，且設 $E(|x_0|)<\infty$. 对此，若定义

$$x(\phi, \omega)=\int\phi(t)x_t(\omega)dt, \tag{31.4}$$

则这就是强平稳广义过程。事实上，由于 $E(|x_0|)<\infty$，便知对几乎所有的 ω，

$$\int\frac{|x_t(\omega)|}{1+t^2}dt<\infty \tag{31.5}$$

(試考虑积分的平均值)，由此卽知，作为 t 的函数，$x_t(\omega)$ 是局部可积的。因此(31.4)給出了强义的广义过程。还可証明它具有强义的平稳性(31.3)。又若有一弱义的广义过程 $x(\varphi, \omega)$，$\phi\in\mathfrak{D}$，且

$$m(\phi)=E(x(\phi)),$$

$$v(\phi, \psi)=E((x(\phi)-m(\phi))\overline{(x(\psi)-m(\psi))}) \tag{31.6}$$

对平行移动都为不变：

$$m(\phi^{(h)})=m(\phi),\ v(\phi^{(h)}, \psi^{(h)})=v(\phi, \psi), \tag{31.7}$$

则就叫做弱平稳广义过程。例如若 x_t 为一弱平稳过程，则下式所定义的就可以看做是弱平稳广义过程：

$$x(\phi)=\int\phi(t)x_t dt \quad (\text{积分是对依范数收敛而言的})。$$

事实上，

$$m(\phi)=\int\phi(t)m(t)dt=m\int\phi(t)dt,$$

$$\begin{aligned}v(\phi, \psi)&=\iint\phi(t)\overline{\psi(s)}v(t, s)dtds=\iint\phi(t)\overline{\psi(s)}v(t-s)dtds\\&=\int v(t)\int\phi(t+s)\overline{\psi(s)}dsdt\\&=\int v(t)\int\phi(t-s)\check{\psi}(s)dsdt,\quad \check{\psi}(s)=\overline{\psi(-s)},\\&=\int v(t)(\phi*\check{\psi})(t)dt\\&=v(\phi*\check{\psi}).\end{aligned}$$

由此就得出 m, v 对平行移动的不变性，又知道 $v(\phi, \psi)$ 可以写成 $v(\phi*\check{\psi})$ 的形状。因为后面的事实可由 $v(\phi, \psi)$ 是有对平行移动的不变性而推出，所以对一般的弱平稳广义过程，恒有

$$v(\phi, \psi)=v(\phi*\check{\psi}). \tag{31.8}$$

由于这里的 v 可以看做 $\mathfrak{D}'$ 的元素，又因

$$v(\phi*\check{\phi})=v(\phi, \phi)=\|x(\phi)-m(\phi)\|^2\geqslant 0,$$

所以利用推广到广义函数情形的 Bochner 定理❶，就得

$$v=\mathfrak{D}'\text{-}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}e^{-i2\pi\lambda t}dF(\lambda), \tag{31.9}$$

此处

$$dF(\lambda)\geqslant 0,\quad \int\frac{dF(\lambda)}{(1+\lambda^2)^k}<\infty. \tag{31.10}$$

这就是 A. Khinchin 的譜分解的普遍化。同样，对于 $x(\phi)$，可找到正交增量过程 y_λ 使得

$$x=\mathfrak{D}'_H\text{-}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}e^{-i2\pi\lambda t}dy_\lambda,\quad \|dy_\lambda\|^2=dF(\lambda). \tag{31.11}$$

这就是 Kolmogoroff 的譜分解的普遍化。

現在令 x_t，$-\infty<t<\infty$，为对时間齐次的复 Wiener 过程（§27 末尾）。x_t 本身显然不是平稳过程，然而由于对时間的齐次性 $\|dx_t\|^2=dt$，所以若考虑 x_t 在广义函数（$\mathfrak{D}'_H$）的意义下的微分（由 $\|dx_t\|^2=dt$ 而明显地可看出普通意义下的微分是不存在的），且記为 Dx_t 时，則这就成为弱平稳广义过程。事实上，由

$$Dx_t(\phi)=-x_t(\phi')=-\int x_t\phi'(t)dt=-\int(x_t-x_a)\phi'(t)dt,$$

（a 为任意）所以 $m(\phi)$ 与 $v(\phi,\psi)$ 可以写成

$$m(\phi)=0,$$

$$v(\phi,\psi)=E\left\{\iint\phi'(t)\overline{\psi'(s)}(x_t-x_a)\overline{(x_s-x_a)}dtds\right\},$$

$$v(\phi,\psi)=\int_a\int_a\phi'(t)\overline{\psi'(s)}(x_t-x_a,\ x_s-x_a)dtds$$

（取 a 使得 ϕ, ψ 的負荷者落入 (a,∞)）

$$=\int_a\int_a\phi'(t)\overline{\psi'(s)}(\min(t,s)-a)dtds$$

$$=\int\phi(t)\overline{\psi(t)}dt=(\phi*\check{\psi})(0)$$

$$=\delta(\phi*\check{\psi})\quad(\delta\text{ 是 Dirac 的 }\delta\text{-函数})。$$

---

❶ 参見 Schwartz: Théorie des distributions, II. Paris, Herman. 1952, 432. ——俄譯本注

这就意味着 v 对平行移动是不变的，又若写成 $v(\phi,\psi)=v(\phi*\check{\psi})$，則得 $v=\delta$。若引用下述記号

$$\left(\frac{dx_t}{dt},\ \frac{\overline{dx_s}}{ds}\right)=0 \quad (t\neq s),$$

$$\left(\frac{dx_t}{dt},\ \frac{\overline{dx_t}}{dt}\right)=\frac{\|dx_t\|^2}{dt^2}=\frac{dt}{dt^2}=\frac{1}{dt},$$

則可使我們更易領会这一点。又因

$$\delta=\mathfrak{D}'\text{-}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}e^{-i2\pi\lambda t}d\lambda,$$

所以 $F(\lambda)\equiv\lambda$ 就是譜函数。这时因为

$$\int\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}<\infty,$$

所以(31.10)中的指数 k 就是 1。

矢量值平稳过程 可以考虑使得 $\boldsymbol{x}_t$, $-\infty<t<\infty$, 的值为 m 維矢量的平稳过程。今就弱平稳过程作一些簡单的説明。設 $\boldsymbol{m}(t)\equiv E(\boldsymbol{x}_t)=\boldsymbol{0}$，这并不丧失普遍性。令 $v(t,s)$ 是矩陣 $(v_{ij}(t,s))$，而

$$v_{ij}(t,s)=E(x_t^i x_s^j) \ \text{即}\ v(t,s)=E(\boldsymbol{x}_t\times\boldsymbol{x}_s). \tag{31.12}$$

当 $v_{ij}(t,s)$ 仅是 $t-s$ 的函数时，$\boldsymbol{x}_t$ 就叫做弱平稳的，記为 $v_{ij}(t,s)=v_{ij}(t-s)$。至于 $v(t)=(v_{ij}(t))$ 的譜分解，H. Cramér 已經采用 A. Khinchin 关于譜分解的普遍化的形状求出了。那就是有一取值于 $m\times m$ 阶矩陣的 $F(\lambda)=(F_{ij}(\lambda))$，使得

$$v(t)=\int e^{-i2\pi\lambda t}dF(\lambda). \tag{31.13}$$

此处 $F(\lambda)$ 是滿足下列关系式的 Hermite 矩陣：

$$\lambda\geqslant\mu\Rightarrow F(\lambda)-F(\mu)\geqslant 0 \quad (\geqslant 0\ \text{是正定型}),$$

$$F(\infty)\ \text{确定},\quad F(-\infty)=0,$$

$$F(\lambda+0)=F(\lambda).$$

事实上，因对任意的 $\{a_i\}$，$v_a(t)=\sum a_i\bar{a}_j v_{ij}(t)$ 满足

$$\sum_{\mu\nu}\xi_\mu\bar{\xi}_\nu v_a(t_\mu-t_\nu)=\sum_{\mu\nu}\sum_{ij}\xi_\mu\bar{\xi}_\nu a_i\bar{a}_j(x^i_{t_\mu},x^j_{t_\nu})=\|\sum\xi_\mu a_i x^i_{t_\mu}\|^2\geqslant 0,$$

所以

$$v_a(t)=\int e^{-i2\pi\lambda t}dF_a(\lambda).$$

$\Delta F_a(\lambda)$ 就是 (a_i) 的 Hermite 形式而且 $\Delta F_a(\lambda)\geqslant 0$。因此可以确定 $F_{ij}(\lambda)$，使得 $\Delta F_a(\lambda)=\sum a_i\bar{a}_j\Delta F_{ij}(\lambda)$，而 $\Delta F(\lambda)=(\Delta F_{ij}(\lambda))$ 就是正定的。

在这个場合下也可以得到相当于 Kolmogoroff 的譜分解。

关系到时間和地点的随机过程 随机过程是表达随时間而变化的偶然量，但也可以考虑时間和地点双方都改变的情形。譬如說，在某个时刻 t 处于某一地点 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 的状态可以由某个随机变数 $x(t,\xi,\omega)$ 来表达的情形。現設

$$m(t,\xi)=E(x(t,\xi,\omega)),$$

$$v(t,\xi;s,\eta)=E\{(x(t,\xi,\omega)-m(t,\xi))\overline{(x(s,\xi,\omega)-m(s,\xi))}\}.$$

若这对时間、空間的平行移动都不变，則 $x(t,\xi,\omega)$ 是平稳的。此时，$m(t,\xi)=$ 常数（以后令为 0），而 $v(t,\xi;s,\eta)$ 就成为 $t-s$，$\xi-\eta=(\xi_1-\eta_1,\xi_2-\eta_2,\xi_3-\eta_3)$ 的函数 $v(t-s,\xi-\eta)$。关于 v 亦可得对应于 Khinchin 分解的譜分解[1]

$$v(t,\xi)=\int_{R^4}e^{-i2\pi(\lambda t+(\sigma,\xi))}dF(\lambda,\sigma),$$

$$(\sigma,\xi)=\sigma_1\xi_1+\sigma_2\xi_2+\sigma_3\xi_3.$$

而 $x(t,\xi,\omega)$ 的分解（Kolmogoroff 的）也与平稳过程的場合一样。

又除对地点的齐次性以外，还可假定各向同性的性质。这时，$v(t,\xi)$ 可以写成 $v(t,|\xi|)$ 的形状，$|\xi|$ 是矢量 ξ 的长度，此时测度 $dF(\lambda,\sigma)$ 对地点也具有各向同性的性质，即 $dF(\lambda,\sigma)=dG(\lambda,r)\cdot$

[1] 这是多元的 Khinchin-Bochner 定理，它的証明可参見 S. Bochner: Harmonic Analysis and the Theory of Probability, 1955, 58 頁。——校者注

$d\theta$(r 表示 σ 的长度,而 θ 就表示 σ 切单位球的点)。也就是

$$v(t, |\xi|) = \int_{R^3} e^{-i2\pi\lambda t} K(r\cdot|\xi|)\, dG(\lambda, r). \qquad (31.14)$$

此处 K 可用 Bessel 函数表为

$$K(p) = 2\pi \frac{J_{1/2}(2\pi p)}{p^{1/2}}. \qquad (31.15)$$

各向同性湍流 (isotropic turbulence) 前面說的是对时点 t 和空間的点 ξ, 对应着一个偶然的純量 $x(t, \xi, \omega)$, 但在这里所考虑的是以矢量 $\boldsymbol{u}(t, \xi, \omega)$ 代替純量。譬如,对任意的时点 t, 令湍流在空間的点 ξ 上的速度为 $\boldsymbol{u}(t, \xi, \omega)$ 就是这种情形。为了弄清楚实质上的难点,而把时点 t 固定起来,并記为 $\boldsymbol{u}(\xi, \omega)$, 再假定 $E\boldsymbol{u}(\xi, \omega) = 0$. 于是 $v(\xi, \eta)$ 就是

$$v(\xi, \eta) = E[\boldsymbol{u}(\xi, \omega) \otimes \boldsymbol{u}(\eta, \omega)],$$

而这就是在点 ξ, η 上的切平面 T_ξ 和 T_η 的張量积 $T_\xi \otimes T_\eta$ 的元素。若这对于空間的全等变換为不变,则 $\boldsymbol{u}(\xi, \omega)$ 叫做各向同性湍流。这个不变性的意义,講得清楚些就是这样的: 令 g 为任意的全等变換, g 将点 ξ 映照成点 $g\cdot\xi$, 而同时由此引出 ξ 的切平面 T_ξ 到 $g\cdot\xi$ 的切平面 $T_{g\cdot\xi}$ 上的全等变換 $\dot{g}$, 还引出 $T_\xi \otimes T_\eta$ 到 $T_{g\cdot\xi} \otimes T_{g\cdot\eta}$ 上的全等变換。后者也以 $\dot{g}$ 来表示。由 g 得出的不变性就是

$$E[\dot{g}\boldsymbol{u}(\xi, \omega) \otimes \dot{g}\boldsymbol{u}(\eta, \omega)] = E[\boldsymbol{u}(g\cdot\xi, \omega) \otimes \boldsymbol{u}(g\cdot\eta, \omega)]. \qquad (31.16)$$

也就是

$$\dot{g}v(\xi, \eta) = v(g\xi, g\eta).$$

現在,若在 ξ 的空間里定一正交系 (e_1, e_2, e_3), 又在 T_ξ 里也取一与这平行的正交系 $(e_1(\xi), e_2(\xi), e_3(\xi))$, 然后以此来决定坐标,就得

$$\left.\begin{array}{l} \xi' = g\xi \Leftrightarrow \xi'_i = \sum_j g_{ij}\xi_j + h_i,\ (g_{ij}) = \text{正交矩陣} \\ u' = \dot{g}\cdot u \Leftrightarrow u'_i = \sum_j g_{ij}u_j, \end{array}\right\} \qquad (31.17)$$

因而(31.16)就可写成

$$E\left(\sum_k g_{ik}u_k(\xi)\sum_l g_{jl}u_l(\eta)\right)=E(u_i(g\xi)\cdot u_j(g\eta)),$$

也就是

$$\sum_{kl} g_{ik}g_{jl}v_{kl}(\xi,\ \eta)=v_{ij}(g\xi,\ g\eta). \tag{31.18}$$

特别,若設 $(g_{ij})=$ 单位矩陣,則

$$v_{ij}(\xi,\ \eta)=v_{ij}(\xi+h,\ \eta+h),\quad h=(h_1,\ h_2,\ h_3).$$

故 v_{ij} 是 $\xi-\eta$ 的函数。若記这函数为 $v_{ij}(\xi-\eta)$,則由(31.18)得

$$\sum_{kl} g_{ik}g_{jl}v_{kl}(\xi)=v_{ij}(g\xi).$$

現在,若設 $v(\xi;a,\ b)=\sum_{ij} a_ib_jv_{ij}(\xi)$,則上式等价于

$$v(g\xi;\ ga,\ gb)=v(\xi;\ a,\ b),\quad g\text{ 是正交矩陣。} \tag{31.19}$$

因由定义,$v(\xi;\ a,\ a)$ 是 ξ 的正定函数,所以

$$v(\xi;\ a,\ a)=\int e^{-i2\pi(\lambda,\ \xi)}m(d\lambda;\ a),\quad m(d\lambda;\ a)\geqslant 0.$$

利用 $v(\xi;a,\ b)$ 是 $a,\ b$ 的双二次形式这一事实,就得

$$\left.\begin{aligned}&v(\xi;\ a,\ b)=\int e^{-i2\pi(\lambda,\xi)}m(d\lambda;\ a,\ b),\\ &m(d\lambda;\ a,\ a)=m(d\lambda;\ a)\geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{31.20}$$

$m(d\lambda;\ a,\ b)$ 就是 $a,\ b$ 的正定的双二次形式。又由 v 的不变性(31.19),便知 m 也具有不变性:

$$m(g\cdot d\lambda;\ ga,\ gb)=m(d\lambda;\ a,\ b).$$

由此就得出表达式

$$\begin{aligned}m(d\lambda;\ a,\ b)=\sum a_ib_j[&\theta_i\theta_jd\theta m_1(dr)\\ &+(\delta_{ij}-\theta_i\theta_j)d\theta m_2(dr)+m_0(d\lambda)].\end{aligned} \tag{31.21}$$

此处 $r=|\lambda|$,$\theta_i=\lambda_i/|\lambda|$,$d\theta$ 是单位球上的球面元素,$m_1,\ m_2$ 是 $(0,\ \infty)$ 上的有界測度,m_0 是只分布于 λ 空間的原点的測度。反之,若由形如(31.21)的 m 和(31.20)来定义 v,便知这是对应于各向同性湍流的 v。

第4章 Markoff 过程

§32 条件概率

考虑概率空間 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$. 設 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的子 Borel 集合体。对 $\boldsymbol{B}_1$ 可測的集或函数自然对 $\boldsymbol{B}$ 也是可測的，但反之未必成立。次設 A 为事件，即对 $\boldsymbol{B}$ 可測的集。按照 Doob 的說法，可将 A 关于 $\boldsymbol{B}_1$ 的**条件概率** (conditional probability) $P(A/\boldsymbol{B}_1)$ 定义为满足下列条件的 ω 的实函数 $P(A/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$:

(C. 1) $P(A/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$ 对 $\boldsymbol{B}_1$ 可測 (故当然是 $\Omega(\boldsymbol{B}, P)$ 上的随机变数)。

(C. 2) 若 B 为 $\boldsymbol{B}_1$ 的可測集，即 $B\in\boldsymbol{B}_1$，则

$$P(A\cdot B)=\int_B P(A/\boldsymbol{B}_1)(\omega)P(d\omega). \tag{32.1}$$

利用 Radon-Nikodym 定理可以証明上述的 $P(A/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$ 是唯一存在的(除零測集外)。因若将 $P(A\cdot B)$ 看成为关于 B 的集函数，则它是 $\Omega(\boldsymbol{B}_1)$ 上的有限測度，并由 $P(A\cdot B)\leqslant P(B)$，故它关于 P(精确些，限制在 $\boldsymbol{B}_1$ 上的 P)为絕对連續，故满足 (32.1)，对 $\boldsymbol{B}_1$ 可測的函数除在零測集上外是唯一的。

因易使人怀疑上述定义与通常所定义的条件概率究竟有何关系，故就此略加說明。設将 Ω 分成为有限或可数个互不相交的可測集之和，即

$$\Omega=B_1+B_2+\cdots \tag{32.2}$$

将 $B_1, B_2, \cdots$ 中若干个(0个，有限个，无限个)集的和的集的全体表为 $\boldsymbol{B}_1$，则 $\boldsymbol{B}_1$ 显然是一 Borel 集合体。此时对 $\boldsymbol{B}_1$ 可測的函数 $P(A/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$ 分别在 $B_1, B_2, \cdots$ 上各取定值 $a_1, a_2, \cdots$，故在

(32.1)中，若以 B_i 代 B，则得

$$P(A\cdot B_i)=a_iP(B_i),$$

亦即

$$a_i=P(A\cdot B_i)/P(B_i).$$

故得次式

$$P(A/\boldsymbol{B}_1)(\omega)=P(A\cdot B_i)/P(B_i),\quad \omega\in B_i. \qquad (32.3)$$

通常 $P(AB)/P(B)$ 叫做在条件 B 下的 A 的概率，并記为 $P(A/B)$. 利用这一記号，(32.3)变成

$$P(A/\boldsymbol{B}_1)(\omega)=P(A/B_i),\quad \omega\in B_i. \qquad (32.3')$$

由此就显示了 Doob 的定义与通常的定义的关系。

次設 $x(\omega)$ 为一随机矢量，其值域为 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$. 設 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $\{x^{-1}(E)/E\in\boldsymbol{B}^A\}$. 当 $x(\omega)$ 的坐标为 $x_\lambda(\omega)$时，可以認为 $\boldsymbol{B}_1$ 是由形如

$$x_\lambda(\omega)<c$$

的集所产生的 Borel 集合体。由于 $R^A(\boldsymbol{B}^A)$上$(\boldsymbol{B}^A)$可测函数 φ 可写成 $\varphi(x(\omega))$的形式，故由 $P(A/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$对 $\boldsymbol{B}_1$ 可测的条件，可将(32.1)写成

$$P(A\cdot x^{-1}(E))=\int_{x^{-1}(E)}\varphi(x(\omega))P(d\omega).$$

若令 x 的分布为 P_x，则因 $P_x=P\cdot x^{-1}$，故得

$$P(A\cdot x^{-1}(E))=\int_E\varphi(\xi)P_x(d\xi).$$

上式左边可看成 $E\in\boldsymbol{B}^A$ 的函数，它是一测度，且因 $P(A\cdot x^{-1}(E))\leqslant P(x^{-1}(E))=P_x(E)$，故它是关于 P_x 絕对連續的測度。因此，由上条件唯一地决定了 $\varphi(\xi)$，此即 Kolmogoroff 所定义的条件概率 $P(A/x=\xi)$. 前面 Doob 所定义的 $P(A/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$ 就是将 $x(\omega)$ 代入 $\varphi(\xi)$中的 ξ 而得的随机变数，以后簡写为 $P(A/x)$.

例 設 x, y 为两个实随机变数，并設其联合分布有密度 $f(\xi,\eta)$，则 Kolmogoroff 条件概率为

$$P(y\in E/x=\xi)=\int_E f(\xi,\ \eta)\,d\eta\Big/\int_{R^1} f(\xi,\ \eta)\,d\eta.$$

由此可得 Doob 的条件概率为

$$P(y\in E/x)=\int_E f(x,\ \eta)\,d\eta\Big/\int_{R^1} f(\xi,\ \eta)\,d\eta.$$

§33　条件数学期望

条件数学期望完全可以和条件概率并行地定义。設 $y(\omega)$ 为实(或复)随机变数,并設

$$E|y|<\infty. \tag{33.1}$$

与上节一样,設 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的子 Borel 体。对任意可测集 B, 定义

$$E(y;\ B)=\int_B y(\omega)P(d\omega). \tag{33.2}$$

y 对于 $\boldsymbol{B}_1$ 的条件数学期望 $E(y/\boldsymbol{B}_1)$ 定义为满足下二条件的 ω 的函数 $E(y/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$:

(E.1)　$E(y/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$ 对 $\boldsymbol{B}_1$ 可测。

(E.2)　对任意 $B\in\boldsymbol{B}_1$, $E(y;B)=E(E(y/\boldsymbol{B}_1);B)$.

这样的 $E(y/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$ 必存在, 且除 P-零测集外是唯一的, 这可与条件概率的情形一样,利用 Radon-Nikodym 定理来証明。

若設 A 的示性函数为 $\chi_A(\omega)$, 由于 $E(\chi_A/\boldsymbol{B}_1)$ 与 $P(A/\boldsymbol{B}_1)$ 一致, 故条件概率可看成条件数学期望的特殊情形。下面叙述有关条件数学期望的性质,由此亦易推出条件概率的性质。

(i)　若 z 对 $\boldsymbol{B}_1$ 可测,且 $E|y|,E|yz|<\infty$,则

$$E(zy/\boldsymbol{B}_1)=zE(y/\boldsymbol{B}_1). \tag{33.3}$$

因为,如 z 为 $M\in\boldsymbol{B}_1$ 的示性函数,则对任意 $B\in\boldsymbol{B}_1$,有

$$E(zy;B)=E(y;\ M\cdot B)=\int_{M\cdot B} E(y/\boldsymbol{B}_1)(\omega)P(d\omega)$$

$$=\int_B z(\omega)E(y/\boldsymbol{B}_1)(\omega)P(d\omega).$$

并由 $z(\omega)E(y/\boldsymbol{B}_1)(\omega)$ 对 $\boldsymbol{B}_1$ 可测，故得

$$E(zy/\boldsymbol{B}_1)(\omega)=z(\omega)E(y/\boldsymbol{B}_1)(\omega).$$

再注意（33.3）的两边关于 z 是綫性的，由此卽易推出对任意的 z，(33.3) 均成立。

（ii） 若 $\boldsymbol{B}_1\subset\boldsymbol{B}_2$，則

$$E(y/\boldsymbol{B}_1)=E(E(y/\boldsymbol{B}_2)/\boldsymbol{B}_1), \tag{33.4}$$

因若 $B\in\boldsymbol{B}_1$，則显然 $B\in\boldsymbol{B}_2$，故

$$E(y;B)=E\{E(y/\boldsymbol{B}_2);B\}$$
$$=E\{E(E(y/\boldsymbol{B}_2)/\boldsymbol{B}_1);B\}.$$

故关系式(33.4)成立。

(iii) 如 $y=c_1y_1+c_2y_2$（c_1，c_2为常数），$E|y_i|<\infty$，$i=1, 2$，則

$$E(y/\boldsymbol{B}_1)=c_1E(y_1/\boldsymbol{B}_1)+c_2E(y_2/\boldsymbol{B}_1). \tag{33.5}$$

(iv) 如 $y_n\to y$，$|y_n|\leqslant z$，$E|z|<\infty$，則

$$E(y_n/\boldsymbol{B}_1)\to E(y/\boldsymbol{B}_1). \tag{33.6}$$

注意 1 以上关系除一 P-零測集外皆成立。

注意 2 若 x 为任意的随机矢量，則与 $P(A/x)$ 同样可以定义 $E(y/x)$.

§ 34 Martingale❶

Martingale 在概率論中是一个非常重要的概念，但在本节中只叙述与本章有关的事項。

設 $x_t, t\in T$（T 为实数集），为一随机过程，且 $E(|x_t|)<\infty$. 設对每一 $t\in T$ 有一 Borel 集合体 $\boldsymbol{B}_t(\subseteq\boldsymbol{B})$ 与之对应，且設

（i） 如 $s<t$，則 $\boldsymbol{B}_s\subset\boldsymbol{B}_t$；

（ii） 对所有 $t\in T$，x_t 对 $\boldsymbol{B}_t$ 可測；

(iii) 如 $s<t$，則 $E\{x_t/\boldsymbol{B}_s\}=x_s$ 以概率为 1 地成立。

❶ 此节可参看 J. L. Doob: Stochastic Processes, 1953, 第七章 §11.——校者注

此时称$\{x_t\}$关于$\{\boldsymbol{B}_t\}$为 Martingale.

如条件(iii)换为

(iii′) 若$s<t$,則$E\{x_t/\boldsymbol{B}_s\}\geqslant x_s$以概率为1地成立,

就称$\{x_t\}$关于$\{\boldsymbol{B}_t\}$为 **Semi-Martingale**. Martingale 是 Semi-Martingale 的特殊情形。

試述 Semi-Martingale 的性質。首先,次式成立:

$$\text{如 } s<t, \text{ 則 } E(x_s)\leqslant E(x_t).$$

此式易由(iii′)导出。$E(x_t)$既对t单調不减,故至多除在可数多个点外,均为連續。

定理1 設T为区間,x_t, $t\in T$, 关于$(\boldsymbol{B}_t t\in T)$为 Semi-Martingale, 且$E(x_t)$連續。若$x_t$为可分,則几乎一切样本函数$\omega$仅有第一类不連續点,且对每一$t$,有

$$P(x_{t-0}=x_t=x_{t+0})=1. \qquad \text{(証略)}$$

§35 轉移概率

設R为具有第二可数性的緊致的 Hausdorff 空間,因而R的拓扑可由距离决定。令$\boldsymbol{B}_R$为含R的一切开集的最小 Borel 体。

函数$P(t, x, E)$,其中t为时間,$t\geqslant 0$, $x\in R$, $E\in\boldsymbol{B}_R$,如滿足下列条件,則称为**轉移概率**(transition probability):

(T.1) 当t, x固定时,$P(t, x, E)$关于E是概率分布。

(T.2) (对x的連續性) 对固定的t,当$x\to x_0$时,測度$P(t, x, E)$泛弱收斂于$P(t, x_0, E)$;即对任意的連續函数f,

$$\int_R f(y)P(t, x, dy)\to\int_R f(y)P(t, x_0, dy), \quad x\to x_0.$$

(T.3) (对t的連續性) 对固定的x,当$t\to 0$时,測度$P(t, x, E)$泛弱收斂于$\delta(x, E)$($=1$, $x\in E$; $=0$, $x\in E^c$);即对于任意的連續函数f,

$$\int_R f(y)P(t, x, dy) \to \int_R f(y)\delta(x, dy) = f(x), \quad t \to 0.$$

注意，由(T.2)可以証明，当固定t和E时，$P(t, x, E)$是x的$(\boldsymbol{B}_R)$可測函数。为此，只要証明对于$(\boldsymbol{B}_R)$任意有界可測函数f，

$$\varphi(x) = \int_R f(y)P(t, x, dy)$$

关于x是$(\boldsymbol{B}_R)$可測函数即可。实际上，記具有这种性质的f的全体为$\mathscr{F}$，由(T.2)，可知$\mathscr{F}$包含一切連續函数。又由可測性的定义，可知$\mathscr{F}$对极限运算不变。故任意有界$(\boldsymbol{B}_R)$可測函数皆属于$\mathscr{F}$.

注意上述各点后，再加上下面的条件：

(T.4) (**Chapman–Kolmogoroff 方程**)

$$P(t+s, x, E) = \int_R P(t, x, dy)P(s, y, E).$$

由上面的叙述可知右边的积分有意义。

$P(t, x, E)$的直观意义是：在最初处于x状态的条件下，經过t时后轉移到E状态的概率。因此 Chapman–Kolmogoroff 方程的意义是：为了經时間$t+s$后自x轉移到E，先經t时后轉入R的某点y，然后再經时間s后轉入E. 这个方程是对这种轉移必然要求的条件。

例1 設R为有限集。显然R对离散拓扑（discrete topology）而言滿足上述条件。为了定义$P(t, x, E)$，只要对点集$\{y\}$定义了E即可，記为$P(t, x, y)$. 由(T.1)得

$$P(t, x, y) \geqslant 0, \quad \sum_y P(t, x, y) = 1. \tag{35.1}$$

(T.2)显然成立。(T.3)变成

$$P(t, x, y) \to \delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases} \tag{35.2}$$

当t固定时，$(P(t, x, y), x, y \in R)$可視为有限阶矩陣，記为P_t，則(35.1)表示P_t的元素非負，且其各行元素的和为1. 这种矩陣称为**随机矩陣**(stochastic matrix). (35.2)表示着

$$P_t \to I\ (\text{单位矩陣}), \quad t \to 0. \tag{35.2'}$$

由矩陣乘法，Chapman-Kolmogoroff 方程变为

$$P_{t+s}=P_t\cdot P_s. \tag{35.3}$$

例 2 設 R 为实数集 R^1 加上 ∞ 的紧化空間。对 $x\in R^1$, $E\in R^1$,設

$$P(t, x, E)=\int_E N_t(y-x)dy, \quad N_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

次設

$$P(t, \infty, E)=\delta(\infty, E).$$

(T.1) 显然成立。試研究对于 x 的連續性。$x_0\neq\infty$ 时，对于連續函数 f，

$$\int f(y)N_t(y-x)dy=\int f(y+x)N_t(y)dy$$

$$\to \int f(y+x_0)N_t(y)dy=\int f(y)N_t(y-x_0)dy,$$

(因 f 在紧空間 $R=R^1\cup\{\infty\}$ 上連續，故有界)。当 $x_0=\infty$ 时，对所有的 y 可得 $f(y+x)\to f(\infty)$ $(x\to\infty)$，故与上式同样可得

$$\int f(y)N_t(y-x)\,dy\to f(\infty)=\int f(y)\delta(\infty, dy).$$

对于 t 的連續性可由次式导出：

$$\int f(y)N_t(y-x)\,dy=\int f\,(x+\sqrt{t}\,y)N_1(y)\,dy\underset{t\to 0}{\to}f(x).$$

Chapman-Kolmogoroff 方程在 R^1 中可由正态分布的性质 $N_{t+s}=N_t*N_s$ 导出，在 ∞ 处則显然成立。

例 3 設 $R=[0, \infty]$，并設 $P(t, x, E)$ 由次式定义：

$$P(t, x, E)=\int_E[N_t(y-x)+N_t(y+x)]dy,\ x\in[0, \infty), E\subset[0, \infty),$$

$$P(t, \infty, E)=\delta(\infty, E).$$

容易驗証，$P(t, x, E)$ 滿足上述四个条件 (T.1) ~ (T.4)。

注意 利用 (T.4) 可自 (T.3) 推得(参看 § 37)

(T.3′) 对固定的 x，当 $t\to t_0$ 时，$P(t, x, E)$ 泛弱收斂于 $P(t_0, x, E)$。

由此可見为何 (T.3) 可表达对 t 的連續性。

§ 36 伴随轉移概率的半群与对偶半群[1]

利用前节的記号，記在 R 上的連續函数的全体为 C。对通常的綫性运算来說，C 是綫性空間，賦与范数 $\|f\|=\max|f(x)|, x\in R$,

[1] 关于本节和下节，可参看关肇直：泛函分析讲义，高教出版社，1958，第四章。——校者注

则它可看作可分的 Banach 空間。今定义 T_t, $t>0$ 如下:

$$T_t f(x)=\int_R f(y) P(t, x, dy), \tag{36.1}$$

则由(T. 2)可知，如 $f\in \boldsymbol{C}$, 则 $T_t f\in \boldsymbol{C}$, 且 T_t 可看做 $\boldsymbol{C}$ 中的綫性算子。利用(T. 1)可得

$$T_t\geqslant 0, \text{ 卽如 } f\geqslant 0, \text{ 则 } T_t f\geqslant 0, \tag{36.2}$$

$$T_t 1=1. \tag{36.3}$$

因而

$$\|T_t\|\equiv\sup\{\|T_t f\|, \|f\|\leqslant 1\}=1. \tag{36.4}$$

由(T. 3)得

$$T_t f(x)\to f(x), \quad x\in R, t\to 0. \tag{36.5}$$

因 $\boldsymbol{C}$ 的共轭空間 $\boldsymbol{C}^*$ 为 R 上的(有符号的)測度空間,故上式变成

$$T_t\to I \text{(弱)} \quad (I \text{ 为恒等算子})。 \tag{36.5'}$$

亦卽对任意的 $f\in \boldsymbol{C}$, $\mu\in \boldsymbol{C}^*$, 上式等价于

$$(T_t f, \mu)\to(f, \mu).$$

由(T. 4)可得半群的性質

$$T_t T_s=T_{t+s}. \tag{36.6}$$

一般,对于可分 Banach 空間 E 上的有界綫性算子族 T_t, $t>0$, 如有性質

$$\|T_t\|\leqslant 1, \ T_t\to I \text{(弱)}, \ T_t T_s=T_{t+s}, \tag{36.7}$$

则称此族为 E 上算子的半群,或簡称为 E 上的**半群**(semi-group).

上述 $\boldsymbol{C}$ 上的算子族 T_t, $t>0$, 亦滿足(36.7), 故此族是 $\boldsymbol{C}$ 上的半群,称为**伴随** $P(t, x, E)$ **的半群**。

其次,对 $\mu\in \boldsymbol{C}^*$,定义

$$T_t^*\mu(E)=\int_R P(t, x, E)\mu(dx), \tag{36.8}$$

于是由 $0\leqslant P(t, x, E)\leqslant 1$,得

$$\|T_t^*\mu\|\leqslant\|\mu\|, \text{ 卽 } \|T_t^*\|\leqslant 1, \tag{36.9}$$

此处$\|\mu\|$是μ的全变差(total variation)。注意到

$$(T_t f, \mu)=(f, T_t^*\mu)=\int_R\int_R f(y)P(t, x, dy)\mu(dx),$$

可見T_t^*是T_t的共轭算子，故記号T_t^*是合理的。由 Chapman-Kolmogoroff 方程得$T_t^*T_s^*=T_{t+s}^*$。又

$$(f, T_t^*\mu)=(T_t f, \mu)\to(f, \mu),\quad f\in \boldsymbol{C},\quad \mu\in \boldsymbol{C}^*.$$

因$\boldsymbol{C}$不等于$(\boldsymbol{C}^*)^*$，故不能导出$T_t^*\to I^*$(弱)(I^*为$\boldsymbol{C}^*$上的恒等算子)，但因它是与此相似的条件，故称为$T_t^*\to I^*$(泛弱)。

綜合上述得

$$\|T_t^*\|\leqslant 1,\quad T_t^*\to I^*(\text{泛弱}),\quad T_t^*T_s^*=T_{t+s}^*. \tag{36.10}$$

因$\boldsymbol{C}^*$不是可分的，而且上述第二条件与(36.7)的第二条件稍有差异，故不能說T_t^*, $t>0$是$\boldsymbol{C}^*$上的半群，但因比較近似，故称为伴随$P(t, x, E)$的**对偶半群**(dual semi-group)。

§37 Hille-Yosida 理論 (1)

設E为可分 Banach 空間，T_t, $t>0$为其上的半群。在前节(36.7)中只要求$T_t\to I$(弱)，但利用其他性質后，可得

$$\|T_t f-f\|\to 0,\ \text{卽}\ T_t\to I(\text{强})^{❶}。 \tag{37.1}$$

要証明这个性質，需要用到 Dunford 的定理(Ann. of Math., 33, 1932, p. 567～573)，故証明从略。由(37.1)还可得到

$$\|T_t f-T_s f\|\to 0\quad (t\to s). \tag{37.2}$$

为此，設$u=\min(t, s)$, $v=|t-s|$，則得

$$\|T_t f-T_s f\|=\|T_u(T_v f-f)\|\leqslant\|T_v f-f\|\to 0.$$

由此可知(37.2)的收斂对s是一致的，故$T_t f$对t为一致連續。

Hille-Yosida 理論是关于半群的生成算子的理論。由于T_t, $t>0$，有群的性質$T_tT_s=T_{t+s}$，因此有时虽未必尽知一切的T_t，

❶ 参看关肇直：泛函分析讲义，高教出版社，1958，482 頁。——校者注

$t>0$，但如知道 T_t，$0<t<\delta$，此处 δ 为任意小的正数，則对任意 t，都可求出 T_t。T_t，$0<t<\delta$ 称为半群 T_t，$t>0$ 的群芽 (germ)。为了給出 $\delta\to 0$ 时的极限性质，定义算子 A 使

$$Af=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t f-f}{t} \quad (\text{极限对范数而取}), \tag{37.3}$$

A 称为**生成算子**(generator)。使上述极限存在的 f 全体形成 A 的定义域 $\mathfrak{D}(A)$。

显然 $\mathfrak{D}(A)$ 为 E 的綫性子空間，A 为綫性算子。通常 $\mathfrak{D}(A)$ 与 E 并不一致，且 A 非有界。但为了易于說明，先对 A 为有界且 $\mathfrak{D}(A)=E$ 的情形作出形式的計算。設对于算子的范数而言，有

$$A=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t-I}{t}. \tag{37.4}$$

由

$$\frac{T_{t+\delta}-T_t}{\delta}=\frac{T_\delta-I}{\delta}T_t,$$

当 $\delta\to 0$ 时得

$$\frac{dT_t}{dt}=AT_t.$$

与普通数的情形一样，解上式得

$$T_t=e^{tA}\left(=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}\right).$$

考虑 T_t 的 Laplace 变換 R_λ

$$R_\lambda=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t dt\left(=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda\frac{k}{n}}T_{\frac{k}{n}}\right).$$

由形式的計算得

$$R_\lambda=\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tA}dt=\int_0^\infty e^{-t(\lambda I-A)}dt=(\lambda I-A)^{-1}.$$

因 $\lambda If=\lambda f$，故 λI 可簡写为 λ，

$$R_\lambda=(\lambda-A)^{-1}.$$

即 $u=R_\lambda v$ 滿足次式

$$(\lambda-A)u=v,$$

根据上述定义，R_λ 称为 T_t 的預解算子(resolvent)。

留意上述各点，今試就一般情形加以严格論証。

預解算子 R_λ 由下式定义：

$$(R_\lambda f, \mu) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t f, \mu)dt, \quad f \in E, \quad \mu \in E^*. \qquad (37.5)$$

亦可以定义为

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt \left(= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda \frac{k}{n}} T_{\frac{k}{n}} f \right). \qquad (37.5')$$

如上所述，因 $T_t f$ 对 t 連續而且有界，故以上定义是可能的。

$$\|R_\lambda f\| \leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T_t f\| dt \leqslant \|f\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{\|f\|}{\lambda}.$$

故得

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda}, \qquad (37.6)$$

卽 R_λ 为有界綫性算子。

其次，往証

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu, \qquad (37.7)$$

$$\|\lambda R_\lambda f - f\| \to 0, \quad \lambda \to \infty. \qquad (37.8)$$

对于 $f \in E$, $\sigma \in E^*$,

$$\begin{aligned}
(R_\lambda R_\mu f, \sigma) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t R_\mu f, \sigma)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(R_\mu f, T_t^* \sigma)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s}(T_s f, T_t^* \sigma) ds dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s}(T_{s+t} f, \sigma) ds dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t + \mu t} \int_t^\infty e^{-\mu s}(T_s f, \sigma) ds dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu s}(T_s f, \sigma) ds \int_0^s e^{-(\lambda-\mu)t} dt
\end{aligned}$$

$$=\int_0^\infty e^{-\mu s}(T_s f,\ \sigma)\frac{e^{-(\lambda-\mu)s}-1}{-(\lambda-\mu)}\,dt$$

$$=\frac{1}{-(\lambda-\mu)}\int_0^\infty (e^{-\lambda s}-e^{-\mu s})(T_s f,\ \sigma)\,dt$$

$$=\frac{1}{-(\lambda-\mu)}[(R_\lambda-R_\mu)f,\ \sigma].$$

$$\|\lambda R_\lambda f-f\|\leqslant\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\|T_t f-f\|\,dt=\int_0^\infty e^{-s}\|T_{\frac{s}{\lambda}}f-f\|\,ds\to 0.$$

R_λ 的值域 $\mathfrak{R}_\lambda$ 由(37.7)可知与 λ 无关。实际上,

$$R_\mu f=R_\lambda[I+(\lambda-\mu)R_\mu]f\in\mathfrak{R}_\lambda,$$

故 $\mathfrak{R}_\mu\subset\mathfrak{R}_\lambda$. 将 λ, μ 互换, 则得 $\mathfrak{R}_\lambda\subset\mathfrak{R}_\mu$. 故 $\mathfrak{R}_\lambda=\mathfrak{R}_\mu$. 因此 $\mathfrak{R}_\lambda$ 可簡写为 $\mathfrak{R}$.、

$\mathfrak{R}_\lambda$ 显然为綫性子空間,由(37.8)得

$$\overline{\mathfrak{R}}_\lambda=E\quad(\text{—表示閉包}),\tag{37.9}$$

即 $\mathfrak{R}_\lambda$ 为 E 的稠密綫性子空間。

其次,試証 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{R}$. 先設 $f\in\mathfrak{R}$. 因 $f=R_\lambda g$, $g\in E$, 故

$$T_s f=T_s R_\lambda g=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_{t+s}g\,dt$$

$$=e^{\lambda s}\int_s^\infty e^{-\lambda t}T_t g\,dt$$

$$=e^{\lambda s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t g\,dt-e^{\lambda s}\int_0^s e^{-\lambda t}T_t g\,dt;$$

$$\frac{T_s f-f}{s}=\frac{e^{\lambda s}-1}{s}R_\lambda g-e^{\lambda s}\frac{1}{s}\int_0^s e^{-\lambda t}T_t g\,dt\to\lambda f-g.$$

故若 $f\in\mathfrak{R}(f=R_\lambda g)$, 则 $f\in\mathfrak{D}(A)$, 且

$$Af=\lambda f-g.$$

注意: $\lambda-A$ 是一一对应的,为証明这一点,只需由$(\lambda-A)f=0$能导出 $f=0$ 即可。由 $(\lambda-A)f=0$ 得 $Af=\lambda f$,故

$$T_s f=f+\lambda sf+o(s)=(1+\lambda s)f+o(s),$$

$$\|f\|\geqslant\|T_s f\|=(1+\lambda s)\|f\|+o(s),$$

$$0 \geqslant \lambda s\|f\|+o(s), \quad 故 \quad \|f\|+o(1) \leqslant 0.$$

由此即得 $\|f\| \leqslant 0$，故 $\|f\|=0$.

现在反过来証明，如果 $f \in \mathfrak{D}(A)$，則 $f \in \mathfrak{R}$. 如此得証，則得証 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{R}$. 旣 $f \in \mathfrak{D}(A)$，故 Af 存在，設 $g=\lambda f-Af$，又設 $f_0=R_\lambda g$. 由上半証明之末所述有

$$Af_0=\lambda f_0-g,$$

故

$$(\lambda-A)f_0=g=(\lambda-A)f.$$

因 $\lambda-A$ 为一对一的，故

$$f=f_0=R_\lambda g \in \mathfrak{R}.$$

总結上述諸結果，可知 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{R}$，且如果 $f \in \mathfrak{D}(A)$（因之 $f=R_\lambda g$），則

$$Af=\lambda f-g. \tag{37.10}$$

$\lambda-A$ 为一对一的，因此

$$(\lambda-A)^{-1}=R_\lambda, \quad 因而 \quad R_\lambda^{-1}=\lambda-A, \tag{37.11}$$

而且

$$\overline{\mathfrak{D}(A)}=\overline{\mathfrak{R}}=E.$$

若 $f \in \mathfrak{D}(A)$，則 $T_t f \in \mathfrak{D}(A)$，且下面的生成方程 (evolution equation) 成立：

$$\frac{dT_t f}{dt}=AT_t f\,(=T_t Af). \tag{37.12}$$

因为，如 $f \in \mathfrak{D}(A)$，則 $f=R_\lambda g$，故

$$T_t f=T_t R_\lambda g=R_\lambda T_t g \in \mathfrak{D}(A),$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT_t f}{dt} &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{T_\delta-I}{\delta} T_t f \\
&= AT_t f=AT_t R_\lambda g \\
&= AR_\lambda T_t g=\lambda R_\lambda T_t g-T_t g \\
&= T_t(\lambda R_\lambda g-g)=T_t AR_\lambda g=T_t Af,
\end{aligned}$$

§38 Hille-Yosida 理論(2) 半群的构造

上节中設半群已知而叙述了其生成算子的性质，以及它与半群的关系。設 A 为生成算子，則显然有

(A.1) A 为綫性算子，且$\overline{\mathfrak{D}(A)}=E$.

(A.2) $(\lambda-A)^{-1}$ 定义于整个 E 上，且

$$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\lambda}\quad(\lambda>0).$$

本节的目的正与此相反，卽要証明，满足上述两条件的 A 是某唯一半群的生成算子。

首先，試由上列条件証明：

$$若 I_\lambda=\lambda(\lambda-A)^{-1}，則 \|I_\lambda f-f\|\to 0\quad(\lambda\to\infty).\qquad(38.1)$$

如 $f\in\mathfrak{D}(A)$，則

$$I_\lambda f-f=(\lambda-A)^{-1}\lambda f-(\lambda-A)^{-1}(\lambda-A)f$$
$$=(\lambda-A)^{-1}(\lambda f-(\lambda-A)f)=(\lambda-A)^{-1}Af,$$
$$\|I_\lambda f-f\|\leqslant\|Af\|/\lambda\to 0\quad(\lambda\to\infty).$$

对一般的 $f\in E$，有

$$f=g+h,\quad g\in\mathfrak{D}(A),\quad \|h\|<\varepsilon.$$

由上述知 $\|I_\lambda g-g\|\to 0$.

$$\|I_\lambda f-f\|\leqslant\|I_\lambda g-g\|+\|I_\lambda h\|+\|h\|$$
$$\leqslant\|I_\lambda g-g\|+2\|h\|<\|I_\lambda g-g\|+2\varepsilon\to 2\varepsilon.$$

故对一般的 f 也有 $\|I_\lambda f-f\|\to 0$.

由上节，如 A 有界，則 $T_t=e^{tA}$ 是以 A 为生成算子的半群。但一般說来，因 A 不是有界的，故不能簡单地得出这样的結論。現在先用 $A_\lambda=AI_\lambda$ 来代替 A. 如上所述，I_λ 可看成恒等算子 I 的近似算子，故 A_λ 亦可看成 A 的近似算子，且由

$$A_\lambda=A\cdot\lambda\cdot(\lambda-A)^{-1}=(\lambda-(\lambda-A))\lambda(\lambda-A)^{-1}$$

$$=\lambda\cdot\lambda(\lambda-A)^{-1}-\lambda I=\lambda(I_\lambda-I)$$

可知 A_λ 有界。今設

$$T_t^{(\lambda)}=e^{tA_\lambda}, \tag{38.2}$$

这就是所求的 T_t 的近似半群。試証 $T_t^{(\lambda)}$ 为半群。显然 $T_t^{(\lambda)}\to I$, $T_t^{(\lambda)}\cdot T_s^{(\lambda)}=T_{t+s}^{(\lambda)}$. $\|T_t^{(\lambda)}\|\leqslant 1$ 的証明如下:

$$\|T_t^{(\lambda)}\|=\|e^{tA_\lambda}\|=\|e^{t\lambda(I_\lambda-I)}\|=\|e^{-t\lambda}e^{t\lambda I_\lambda}\|$$

$$\leqslant e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda I_\lambda}\|\leqslant e^{-t\lambda}\sum_n\frac{\|t\lambda I_n\|^n}{n!}\leqslant e^{-t\lambda}\sum\frac{(t\lambda)^n}{n!}=1.$$

其次,令

$$T_t=\lim_{\lambda\to\infty}T_t^{(\lambda)} \tag{38.3}$$

来求 T_t, 为此,有必要証明其收敛性。

首先注意

$$(\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}=(\mu-A)^{-1}(\lambda-A)^{-1}, \tag{38.4}$$

为此,只須証

$$(\lambda-A)(\mu-A)(\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}=I.$$

由

$$\mu-A=(\mu-\lambda)I+(\lambda-A),\quad \lambda-A=(\lambda-\mu)I+(\mu-A),$$

再注意 $(\lambda-A)^{-1}$, $(\mu-A)^{-1}$ 的值域落入 $\lambda-A$, $\mu-A$ 的定义域内,故只要作些形式的計算即得証。由(38.4)直接可得

$$I_\lambda I_\mu=I_\mu I_\lambda,\ \text{即}\ A_\lambda A_\mu=A_\mu A_\lambda. \tag{38.5}$$

(回忆 $A_\lambda=\lambda(I_\lambda-I)$.)由此可知 $T_t^{(\lambda)}$, $T_t^{(\mu)}$ 能与 A_λ, A_μ 中任一个互相交換。又由 $T_t^{(\lambda)}=e^{tA_\lambda}$ 得

$$\frac{dT_t^{(\lambda)}f}{dt}=A_\lambda T_t^{(\lambda)}f,\quad \frac{dT_t^{(\mu)}f}{dt}=A_\mu T_t^{(\mu)}f.$$

故若設 $f_t=T_t^{(\lambda)}f-T_t^{(\mu)}f$,则得

$$\frac{df_t}{dt}=A_\lambda T_t^{(\lambda)}f-A_\mu T_t^{(\mu)}f=A_\lambda\cdot f_t+g_t, \tag{38.6}$$

其中

$$g_t=(A_\lambda-A_\mu)T_t^{(\mu)}f=T_t^{(\mu)}(A_\lambda f-A_\mu f). \tag{38.7}$$

用解普通微分方程同样的方法解(38.6)，得

$$f_t=\int_0^t e^{(t-s)A_\lambda}g_s ds+f_0=\int_0^t e^{(t-s)A_\lambda}g_s ds$$

$$=\int_0^t T_{t-s}^{(\lambda)}g_s ds.$$

故 $\|f_t\|\leqslant\int_0^t\|T_{t-s}^{(\lambda)}g_s\|ds\leqslant\int_0^t\|g_s\|ds\leqslant\|A_\lambda f-A_\mu f\|\cdot t.$

因此，若 $f\in\mathfrak{D}(A)$，則 $A_\lambda f-A_\mu f=(I_\lambda-I_\mu)Af\to 0(\lambda,\ \mu\to\infty)$。故当 $\lambda,\ \mu\to\infty$ 时，对有界区間内的 t，$f_t=T_t^{(\lambda)}f-T_t^{(\mu)}f$ 一致地趋于 0 (广义的一致收斂)。

至于对任意的 f，則取与 f 接近的 $g\in\mathfrak{D}(A)$，并注意

$$\|T_t^{(\lambda)}f-T_t^{(\mu)}f\|\leqslant 2\|f-g\|+\|T_t^{(\lambda)}g-T_t^{(\mu)}g\|,$$

可見 $T_t^{(\lambda)}f$ 对于 t 仍为广义的一致收斂。設其极限为 T_tf，易証 T_t 为 E 上的半群。今証 T_t 的生成算子 $\widetilde{A}$ 与原来的 A 相等。

对于 $f\in\mathfrak{D}(A)$，有

$$T_t^{(\lambda)}f-f=\int_0^t T_s^{(\lambda)}A_\lambda f ds=\int_0^t T_s^{(\lambda)}I_\lambda Af ds.$$

由于

$$\|T_s^{(\lambda)}I_\lambda Af-T_sAf\|\leqslant\|T_s^{(\lambda)}I_\lambda Af-T_s^{(\lambda)}Af\|+\|T_sAf-T_s^{(\lambda)}Af\|$$

$$\leqslant\|I_\lambda Af-Af\|+\|T_sAf-T_s^{(\lambda)}Af\|\to 0$$

(在 $0\leqslant s\leqslant t$ 内为一致收斂)，

故

$$T_tf-f=\int_0^t T_sAf ds.$$

由此得

$$\frac{T_tf-f}{t}\to Af,\ \text{即}\ f\in\mathfrak{D}(\widetilde{A}),\ \text{且}\ \widetilde{A}f=Af.$$

这表示 $\widetilde{A}\supset A$。由上节所述，$(\lambda-\widetilde{A})^{-1}$ 存在，又由关于 A 的假定，

可知$(\lambda-A)^{-1}$也存在，故由$\widetilde{A}\supset A$可得$(\lambda-\widetilde{A})^{-1}\supset(\lambda-A)^{-1}$。又因$(\lambda-A)^{-1}$为定义在整个$E$上的算子，故$(\lambda-\widetilde{A})^{-1}=(\lambda-A)^{-1}$，故得$\widetilde{A}=A$。

以A为生成算子的半群的存在已經証明，为証其唯一性，只要証明，若存在另一如此的半群S_t，則$T_t=S_t$。由于$\mathfrak{D}(A)$在E內稠密，T_t，S_t有界，故只要对$f\in\mathfrak{D}(A)$，証明$T_tf=S_tf$卽可。

$$\frac{d}{dt}(S_tf-T_t^{(\lambda)}f)=AS_tf-A_\lambda T_t^{(\lambda)}f$$

$$=A_\lambda(S_tf-T_t^{(\lambda)}f)+S_t(I-I_\lambda)Af.$$

与解(38.6)同样解上式得

$$S_tf-T_t^{(\lambda)}f=\int_0^t T_{t-u}^{(\lambda)}S_u(I-I_\lambda)Af\,du.$$

故

$$\|S_tf-T_t^{(\lambda)}f\|\leqslant t\|(I-I_\lambda)Af\|\to 0,\quad \lambda\to\infty,$$

由此得

$$S_tf=T_tf.$$

注意　由上述証明，可見条件(A.2)对所有的$\lambda>0$成立幷非必要。如对$\lambda=\lambda_n\to\infty$，能使(A.2)滿足，則以$A$作为生成算子的半群$T_t$唯一存在。

§39　轉移概率的生成算子(1)　一般理論

設$P(t,x,E)$为§35中所引入的轉移概率。如§36所述，此轉移概率对应于C上的半群T_t，$t>0$。T_t，$t>0$的生成算子A称为轉移概率$P(t,x,E)$的生成算子。若$f\in\mathfrak{D}(A)$，則

$$Af(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\int_R f(y)P(t,x,dy)-f(x)}{t}.\qquad(39.1)$$

下列三条件是等价的：

(i) $f\in\mathfrak{D}(A)$,

(ii) $\varphi_t(x)=\frac{1}{t}\left[\int_R f(y)P(t,x,dy)-f(x)\right]$当$t\to0$时,对$x$为一致收斂,

(iii) $\varphi_t(x)$在$t\to0$时,对每一x都收斂,且其极限对x为連續。

(i)→(ii),(i)→(iii)显然。因$\varphi_t(x)$是x的連續函数,若(ii)成立,則$\varphi_t(x)$的极限$\varphi(x)$也連續,并且$\|\varphi_t-\varphi\|\to0$,故$f\in\mathfrak{D}(A)$. 今試由(iii)导出(i). 把使(iii)成立的f全体記为$\widetilde{\mathfrak{D}}$,对$f\in\widetilde{\mathfrak{D}}$,定义

$$\widetilde{A}f(x)=\lim_{t\downarrow0}\varphi_t(x).$$

显然$\widetilde{A}f\in C$. 如$f\in\mathfrak{D}(A)$,則$f\in\widetilde{\mathfrak{D}}$,且$Af=\widetilde{A}f$. 故$A\subset\widetilde{A}$. 注意$\lambda-\widetilde{A}$为一一对应的,为証此,先注意若$f(x)$在$x=x_0$处取最小值,則

$$\widetilde{A}f(x_0)=\lim_{t\downarrow0}\varphi_t(x_0)\geqslant0.$$

为了証明$\lambda-\widetilde{A}$为一一对应的,只要証明

$$(\lambda-\widetilde{A})u=0\to u=0.$$

因u为連續函数,故有最小值$u(x_0)$.

$$u(x_0)=\frac{1}{\lambda}\widetilde{A}u(x_0)\geqslant0,\ \text{故恒有}\ u(x)\geqslant0.$$

同样因$(\lambda-\widetilde{A})(-u)=0$,故$-u(x)\geqslant0$,于是$u(x)\equiv0$.

由$A\subset\widetilde{A}$得$\lambda-A\subset\lambda-\widetilde{A}$. 因$\lambda-A$有逆算子$(\lambda-A)^{-1}(=R_\lambda)$,并由上述知$(\lambda-\widetilde{A})^{-1}$也存在,故$R_\lambda=(\lambda-A)^{-1}\subset(\lambda-\widetilde{A})^{-1}$. 因$R_\lambda$的定义域为全空間$C$,故得

$$(\lambda-\widetilde{A})^{-1}=R_\lambda=(\lambda-A)^{-1},\ \text{即}\ \widetilde{A}=A.$$

故$\widetilde{\mathfrak{D}}=\mathfrak{D}(A)$,因此(iii)→(i).

上节中已証明Banach空間的算子A产生半群的充要条件为

(A. 1)及(A. 2)。下面将求特别是 A 为轉移概率 $P(t, x, E)$ 的生成算子的条件。

定理 1 A 为轉移概率的生成算子的充要条件是:

(a. 1) A 是 C 上的綫性算子,且 $\overline{\mathfrak{D}(A)}=C$,

(a. 2) $A\cdot 1=0$,

(a. 3) 若 $u\in C$ 在 $x=x_0$ 处取最小值,则 $Au(x_0)\geqslant 0$,

(a. 4) 对于 $\lambda>0$, $(\lambda-A)u=v$ 对一切 $v\in C$ 必有解 u.

証明 必要性易由定义及半群的一般理論推出,今只証其充分性。先証 $(\lambda-A)^{-1}$ 是定义在全 C 上的。由(a. 4)可知,只須証明 $\lambda-A$ 为一一对应,卽由 $\lambda u=Au$ 能得 $u=0$ 卽可。因 $u(x)$ 为連續函数,故取最小值 $u(x_0)$,

$$u(x_0)=\frac{1}{\lambda}Au(x_0)\geqslant 0 \quad (\text{由 (a. 3)}).$$

故恒有 $u(x)\geqslant 0$. 又因 $\lambda(-u)=A(-u)$,利用同样的論証得 $-u(x)\geqslant 0$. 故 $u(x)\equiv 0$.

其次証 $\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$. 設 $u=(\lambda-A)^{-1}v$,令 $u(x)$ 之最小值为 $u(x_0)$,则

$$v(x_0)=(\lambda-A)u(x_0)=\lambda u(x_0)-Au(x_0)\leqslant\lambda u(x_0).$$

故

$$u(x)\geqslant u(x_0)\geqslant\frac{1}{\lambda}v(x_0)\geqslant-\frac{1}{\lambda}\|v\|.$$

又因 $(-u)=(\lambda-A)^{-1}(-v)$,故

$$-u(x)\geqslant-\frac{1}{\lambda}\|-v\|=-\frac{1}{\lambda}\|v\|,$$

卽

$$u(x)\leqslant\frac{1}{\lambda}\|v\|,$$

由此卽得

$$\|u(x)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|v\|.$$

于是上节的(A.1)，(A.2)均已滿足，故 A 为 $\boldsymbol{C}$ 上某半群 $T_t, t>0$ 的生成算子。

試証 $T_t \geqslant 0$. 亦卽如 $u \geqslant 0$ (卽对一切 $x, u(x) \geqslant 0$)，則 $T_t u \geqslant 0$. 为此先証 $(\lambda-A)^{-1} \geqslant 0$，也就是說，設 $(\lambda-A)u=v$，而 $v \geqslant 0$，則 $u \geqslant 0$. 令 $u(x)$ 的最小值为 $u(x_0)$，則 $Au(x_0) \geqslant 0$. 故

$$\lambda u(x_0)=Au(x_0)+v(x_0) \geqslant 0,$$

亦卽

$$u \geqslant 0.$$

故得 $I_\lambda=\lambda(\lambda-A)^{-1} \geqslant 0$. 由此得

$$T_t^{(\lambda)}=e^{tA_\lambda}=e^{t\lambda(I_\lambda-I)}=e^{-t\lambda}e^{tI_\lambda}=e^{-t\lambda}\sum\frac{(tI_\lambda)^n}{n!} \geqslant 0,$$

故

$$T_t=\lim_{\lambda\to\infty} T_t^{(\lambda)} \geqslant 0.$$

其次，試証 $T_t 1=1$. 因 $(\lambda-A)\frac{1}{\lambda}=1$ (参看 (a.2))，故

$$\frac{1}{\lambda}=(\lambda-A)^{-1}1=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t \cdot 1 dt,$$

故得 $T_t 1=1$.

因 $T_t f(x)$ 对每一 t, x 而言皆为 f 的綫性泛函数，而且

若 $f \geqslant 0$，則 $T_t f(x) \geqslant 0$,

$$T_t 1(x)=1,$$

故由 Riesz 定理，可知存在概率分布 $P(t, x, E)$，使

$$T_t f(x)=\int_R f(y)P(t, x, dy).$$

$P(t, x, E)$ 滿足轉移概率諸条件，可由 $T_t, t>0$ 是半群而容易导出。

注意 与上节 (A.2) 同样，(a.4) 亦只須对 $\lambda=\lambda_n\to\infty$ 成立卽可。

§40 轉移概率的生成算子(2) 例題

例1 上面已看到，R 为有限集时，轉移概率对应于一个矩陣的半群 P_t. 这时 C 为矢量空間，其維数等于 R 中元素的个数。若将其中矢量写成纵矢量，則 $T_t f$ 等于 $P_t f$，因此矩陣的半群 $P_t, t>0$ 可以看成伴随轉移概率的半群。故生成算子 A 亦可看成矩陣，且

$$Af=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t-I}{t}f,\ f\in\mathfrak{D}(A).$$

此时由 $\overline{\mathfrak{D}(A)}=C$ 可得 $\mathfrak{D}(A)=C$(因 C 为有限維)，故上式对任意 f 均成立，且

$$A=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t-I}{t}.$$

因 $T_t\geqslant 0$(此表示 T_t 的諸元素均 $\geqslant 0$)，故若令 $A=(a_{ij})$，則

$$a_{ij}\geqslant 0 \quad (i\neq j). \tag{40.1}$$

又因 $T_t\mathbf{1}=\mathbf{1}$($\mathbf{1}$ 为所有元素均为 1 的矢量)，故 $A\mathbf{1}=0$，因此

$$\sum_j a_{ij}=0. \tag{40.2}$$

此二条件为必要，但亦为充分。为此，試驗証上节的(a.1)～(a.4)成立。(a.1)，(a.2)是显然的。設矢量 u 的元素中最小者为 u_{i_0}.

$$(Au)_{i_0}=\sum_j a_{i_0j}u_j=a_{i_0i_0}u_{i_0}+\sum_{j\neq i_0}a_{i_0j}u_j$$

由(40.1) $\qquad \geqslant a_{i_0i_0}u_{i_0}+\sum_{j\neq i_0}a_{i_0j}u_{i_0}$

由(40.2) $\qquad =0.$

此卽表示(a.3)成立。現証明对充分大的λ，

$$(\lambda-A)u=v \tag{40.3}$$

有解。形式地得

$$u=(\lambda-A)^{-1}v=\lambda^{-1}\left(1-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}v=\lambda^{-1}\left[1+\left(\frac{A}{\lambda}\right)+\left(\frac{A}{\lambda}\right)^2+\cdots\right]v,$$

为使上式收斂，只要令 $\lambda>\|A\|$. 事实上，对此种 λ 可知上式右边

确定而且給出(40.3)的解。

例 2 試求§35例2中的轉移概率的生成算子。为此要利用§37中的

$$\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{R},\quad AR_\lambda f=\lambda R_\lambda f-f.$$

以后用 $x, y, \cdots$ 表有限数，因

$$T_t f(x)=\int N_t(y-x)f(y)\,dy,\quad T_t f(\infty)=f(\infty),$$

故

$$R_\lambda f(x)=\int R_\lambda(y-x)f(y)\,dy,\quad R_\lambda f(\infty)=\frac{1}{\lambda}f(\infty).$$

这里

$$R_\lambda(x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}N_t(x)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}e^{-\sqrt{2\lambda}|x|},$$

故

$$R_\lambda f(x)=\int\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|}f(y)\,dy.$$

由上式可知 $R_\lambda f(x)$ 为二次連續可微，且

$$(R_\lambda f)''(x)=2\lambda R_\lambda f(x)-2f(x),$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}(R_\lambda f)''(x)=0$，由此即得

$$\mathfrak{D}(A)\subset\widetilde{\mathfrak{D}}\equiv\{g/g\in \boldsymbol{C},\ g''(x)\text{連續},\ \lim_{x\to\infty}g''(x)=0\},$$

且对于 $g(=R_\lambda f)\in\mathfrak{D}(A)$ 可得

$$Ag(x)=\lambda g(x)-f(x)=\frac{1}{2}g''(x),\quad Ag(\infty)=0.$$

今考虑使 $\mathfrak{D}(\widetilde{A})=\widetilde{\mathfrak{D}}$，$\widetilde{A}g(x)=\frac{1}{2}g''(x)$，$\widetilde{A}g(\infty)=0$ 成立的 $\widetilde{A}$。

显然 $\widetilde{A}\supset A$。次証 $(\lambda-\widetilde{A})^{-1}$ 之存在。为此要由 $\lambda u=\widetilde{A}u$ 推出 $u=0$。$\lambda u=\widetilde{A}u$ 的解 u 滿足

$$\lambda u(x)=\frac{1}{2}u''(x),$$

即

$$u(x)=ae^{\sqrt{2\lambda}x}+be^{-\sqrt{2\lambda}x}.$$

因$u(x)$有界,故得 $a=b=0$,亦即 $u=0$,因此,

$$(\lambda-\widetilde{A})^{-1}\supset(\lambda-A)^{-1}=R_\lambda,$$

故

$$(\lambda-\widetilde{A})^{-1}=(\lambda-A)^{-1},$$

亦即 $\widetilde{A}=A$.

例3 考虑§35中例3,利用与上例相同的論証,可知$\mathfrak{D}(A)$的元素f可由下列諸条件来表达:

$$f\in \boldsymbol{C},\quad f''(x)\text{連續}(0<x<\infty),$$
$$\lim_{x\to 0}f''(x)\text{存在,有限},\ \lim_{x\to\infty}f''(x)=0,$$
$$\lim_{x\to 0}f'(x)=0,$$

且

$$Af(x)=\frac{1}{2}f''(x),\quad Af(0)=\frac{1}{2}f''(0+),\quad Af(\infty)=0.$$

例4 設R为以mod 1来考虑的实数系,$\boldsymbol{C}$为定义于实数系上周期为1的連續函数空間,以$\mathfrak{D}$表$\boldsymbol{C}$中之二次連續可微函数全体,且对$f\in\mathfrak{D}$,定义

$$Af=f'.$$

試証A为某轉移概率之生成算子,为此必須驗証上节(a.1)~(a.4)滿足。(a.1)~(a.3)是显然的。为証(a.4),只要解方程

$$\lambda u-u'=v$$

即可,此处v是周期为1的函数,u必須自这类函数中求出。

$$\lambda e^{-\lambda x}u(x)-e^{-\lambda x}u'(x)=e^{-\lambda x}v(x),$$
$$(-e^{-\lambda x}u(x))'=e^{-\lambda x}v(x).$$

因当$x=+\infty$时,$e^{-\lambda x}u(x)$为0,故

$$e^{-\lambda x}u(x)=\int_x^\infty e^{-\lambda y}v(y)\,dy,$$

$$u(x)=\int_x^{\infty}e^{-\lambda(y-x)}v(y)\,dy\,.$$

此解确能满足上面的方程，且由

$$u(x+1)=\int_{x+1}^{\infty}e^{-\lambda(y-x-1)}v(y)\,dy=\int_x^{\infty}e^{-\lambda(y-x)}v(y+1)\,dy$$

$$=u(x)\quad(\text{注意 } v(y+1)=v(y)),$$

故 $u(x)$ 有周期 1.

由上述得

$$R_\lambda v(x)=\int_x^{\infty}e^{-\lambda(y-x)}v(y)\,dy=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}v(x+t)\,dt\,.$$

故 $T_t v(x)=v(x+t)$，因此

$$P(t,\,x,\,E)=\delta(x+t,\,E).$$

显然 $x+t$ 亦是 mod 1 的实数。

例 5 設 R 与上例同样为 mod 1 的实数系，且 $Au=u''/2$. 因此 A 亦滿足 (a.1) ~ (a. 4)，故 A 为某 $P(t,\,x,\,E)$ 的生成算子。設 $\mathfrak{D}(A)$ 为二次連續可微函数全体，$P(t,\,x,\,E)$ 由次式給出：

$$P(t,\,x,\,E)=\int_E\widetilde{N}_t(y-x)\,dy,$$

$$\widetilde{N}_t(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}N_t(x+2n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+2n)^2}{2t}}\,.$$

例 6 R 与上例中一样。令 $Au=u'''$，又令 $\mathfrak{D}(A)$ 为三次連續可微函数全体，則此时不对应于轉移概率，因为 (a. 3) 不成立。为証 (a. 3) 不成立，只需找出三次連續可微而周期为 1 的函数 u，它在零点取最小值，而且 $u'''(0)<0$. 这只要取周期为 1 的函数 $u(x)$，使 $u(x)\geqslant 0$，并在 $x=0$ 处的展开为

$$u(x)=ax^2+bx^3+\cdots\quad(a>0,b<0)$$

卽可。例如，下面的函数就是此类函数：

$$u(x)=2(\sin 2\pi x)^2-(\sin 2\pi x)^3.$$

§ 41 Markoff过程(1) Markoff性

設 $P(t,x,E)$ 是 R 上的轉移概率。R 及 P 应滿足 § 35 中的条件。轉移概率 $P(t,x,E)$ 的直观意义是：最初处于状态 x 經过时間 t 后轉入 E 中的状态的概率。亦即，它給出了运动体系随时間变化的概率法則。今以 $x(t)$ 表此体系在时刻 t 所处的状态。$x(t)$ 显然是随机过程，从測度論的观点看来，应該写成 $x(t, \omega)$，$\omega\in\Omega(\boldsymbol{B}, P)$．若設在 $t=0$ 时的概率分布，即初始状态 $x(0, \omega)$ 的概率分布为 Φ，則 $x(t, \omega)$ 的有限維联合分布显然为

$$P(x(0, \omega)\in E_0, x(t_1, \omega)\in E_1, x(t_2, \omega)\in E_2, \cdots, x(t_n, \omega)\in E_n)$$

$$=\int_{E_0}\Phi(d\xi_1)\int_{E_1}P(t_1, \xi_1, d\xi_2)\int_{E_2}P(t_2-t_1, \xi_2, d\xi_3)\cdots$$

$$\cdots\int_{E_n}P(t_n-t_{n-1}, \xi_{n-1}, d\xi_n). \tag{41.1}$$

这样的随机过程 $x(t, \omega)$ 是否存在？設 $\Omega=R^{[0,\infty)}$，$\omega=\prod_t\omega_t$，$x(t, \omega)=\omega_t$，則問題化为能否在 Ω 上引进概率 P，使(41.1)成立。这个可能性与实数情形(Kolmogoroff 定理)一样可以証明。因为这样的 $x(t, \omega)$ 本質上只有一个，故称它为具有轉移概率 $P(t, x, E)$ 及初始概率 Φ 的随机过程。这类过程最初由 Markoff 所研究，故也称为 **Markoff 过程** (Markoff process)。$x(t, \omega)$ 的概率法則(有限維分布)虽与初始概率 Φ 有关，但只要討論 Φ 为 δ 分布 $\delta(a, E)$ 的情形，則一般情形可由 $\Phi(da)$ 积分而得。$\delta(a, E)$ 的情形即是 $x(0,\omega)\equiv a$，亦即从状态 a 出发的情形。这样的 Markoff 过程記为 $x^{(a)}(t, \omega)$．本来 ω 也应写成 $\omega^{(a)}$，但从前后关系看来容易明白，故省略。以后称 Markoff 过程族 $x^{(a)}(t, \omega)$，$a\in R$，为对应于 $P(t, x, E)$ 的 Markoff 过程。概率論的目的是研究 $x^{(a)}(t, \omega)$，迄今有关轉移概率及其半群的叙述是为此目的所作的准备。

Markoff 过程 $x^{(a)}(t, \omega)$ 的概率性质中，特别显著的是 Markoff 性。

(i) 若以 $\boldsymbol{B}_t$(必要时亦写为 $\boldsymbol{B}_t^{(a)}$)表示包含如下形状

$$\{\omega/x^{(a)}(s, \omega)\in E\},\ s\leqslant t,\ E\in \boldsymbol{B}_R$$

的 ω 集的最小 Borel 体，则以概率为 1 地有

$$P(x^{(a)}(t+u, \omega)\in E/\boldsymbol{B}_t)=P(x^{(b)}(u)\in E)_{b=x^{(a)}(t,\omega)}$$
$$=P(u, x^{(a)}(t, \omega), E). \qquad (41.2)$$

直观地説：若在 t 时的状态确定，则以后运动的状态与 t 以前的无关，好象从 t 时的状态出发一样，这种性质称为 Markoff 性。要証明上面的关系式，只須証明，若 $M\in\boldsymbol{B}_t$，则

$$P(\{\omega/x^{(a)}(t+u, \omega)\in E\}\cap M)=E\{P(u, x^{(a)}(t, \omega), E);M\}. \qquad (41.2')$$

当 M 为形如

$$\{\omega/x^{(a)}(t_1, \omega)\in E_1,\cdots,x^{(a)}(t_n, \omega)\in E_n\},0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t$$

的集时，由(41.1)立得(41.2′)。由于(41.2′)两边对 M 是可加的，故易証对所有的 $M\in \boldsymbol{B}_t$ 均成立。

(ii) 上述 Markoff 性可稍推广如下：如 $0<u_1<u_2<\cdots<u_m$，则对 $M\in\boldsymbol{B}_t$ 以概率为 1 地有

$$P\{x^{(a)}(t+u_1)\in E_1,x^{(a)}(t+u_2)\in E_2,\cdots,x^{(a)}(t+u_m)\in E_m/\boldsymbol{B}_t\}$$
$$=P\{x^{(b)}(u_1)\in E_1, x^{(b)}(u_2)\in E_2,\cdots,x^{(b)}(u_m)\in E_m\}_{b=x^{(a)}(t)}. \qquad (41.3)$$

这式可用与(i)同样的方法証明。

(iii) 再推广(ii)。为此，引进若干記号。$R^{[0,\infty)}$ 的意义如前所述。$\xi\in R^{[0,\infty)}$ 可以写成 $\prod\limits_{0\leqslant t<\infty}\xi_t$ 的形状，而 ξ_t 称为 ξ 的 t 坐标，并以 $p_t(\xi)$ 来表示。$\boldsymbol{B}(R^{[0,\infty)})$ 表包含 $R^{[0,\infty)}$ 中形如 $p_t^{-1}(E)$，$E\in\boldsymbol{B}_R$ 的子集的最小 Borel 体。今設 $x^{(a)}(\cdot, \omega)$ 表在 $\prod\limits_u x^{(a)}(u, \omega)$，亦即在 $R^{[0,\infty)}$ 中取值的随机变数，且其第 u 坐标等于 $x^{(a)}(t, \omega)$，又設

$x^{(a)}(t+\cdot,\omega)$表同样的随机变数，其第u坐标等于$x^{(a)}(t+u,\omega)$。

于是，对于$\Xi\in\boldsymbol{B}(R^{[0,\infty)})$，以概率为1地有

$$P\{x^{(a)}(t+\cdot)\in\Xi/\boldsymbol{B}_t\}=P\{x^{(b)}(\cdot)\in\Xi\}_{b=x^{(a)}(t)}. \qquad (41.4)$$

若Ξ为形如$p_{u_1}^{-1}(E_1)\cap p_{u_2}^{-1}(E_2)\cap\cdots\cap p_{u_m}^{-1}(E_m)$的集，則上式即为(ii)中的(41.3)。一般情况可利用两边对Ξ的可加性証明之。

对应于上述諸性質，可得关于条件数学期望的下述性質。

(iv) 如f为有界$(\boldsymbol{B}_R)$可測函数，則

$$E\{f(x^{(a)}(t+u))/\boldsymbol{B}_t\}=E\{f(x^{(b)}(u))\}_{b=x^{(a)}(t)}. \qquad (41.5)$$

若f是可測集的示性函数，則上式由(i)而显然成立。对一般的f，可利用上式两边对f的可加性来証明。

(v) 如f是$R(\boldsymbol{B}_R)$上的n元有界$(\boldsymbol{B}_R)$可測函数，則

$$E\{f(x^{(a)}(t+u_1),x^{(a)}(t+u_2),\cdots,x^{(a)}(t+u_n))/\boldsymbol{B}_t\}$$
$$=E\{f(x^{(b)}(u_1),x^{(b)}(u_2),\cdots,x^{(b)}(u_n))\}_{b=x^{(a)}(t)}. \qquad (41.6)$$

(vi) 如f是$R^{[0,\infty)}(\boldsymbol{B}(R^{[0,\infty)}))$上的有界可測函数，則

$$E\{f(x^{(a)}(t+\cdot))/\boldsymbol{B}_t\}=E\{f(x^{(b)}(\cdot))\}_{b=x^{(a)}(t)}. \qquad (41.7)$$

与由(i)导出(iv)的方法一样，(v)及(vi)可分别由(ii)及(iii)导出。

§42 Markoff过程(2) 样本过程的性質

在§13中，已叙述过取实数值的随机过程的可分性。但因現在所考虑的随机过程取值于具第二可数性的紧致空間R，故有必要重新定义可分性。

定义 在R内取值的随机过程$x_t,t\in T$称为**可分的**，如果对于R上任意的实連續函数f，$f(x_t)$是可分的。

設$\{f_\lambda\}$为R上一族实連續函数，若任意的連續函数能被$\{f_\lambda\}$中有限个函数的綫性組合来一致逼近时，則$\{f_\lambda\}$称为R上的实連續函数的**基**(base)。由于R是具第二可数性的紧致空間，故知有

可数基存在。

上述定义中,要求对所有的实連續函数, $f(x_t)$ 为可分,但实际上只要求对于基中的函数就够了。

利用取实数值的随机过程的可分修正 (separable modification)的存在,可以証明取值于 R 的随机过程也有可分修正。故不妨假定上节中定义的 Markoff 过程是可分的。

定理 1 对可分 Markoff 过程 $x^{(a)}(t)$ 的样本过程,"对于所有的 t,两側极限存在"的概率为 1. 且对每个 t,

$$P(x(t-0)=x(t)=x(t+0))=1.$$

証明 对 $f\in \boldsymbol{C}, f\geqslant 0$,考虑

$$Y(t)=e^{-\lambda t}R_\lambda f(x^{(a)}(t)).$$

$$\begin{aligned}
Y(t)&=e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T_s f(x^{(a)}(t))ds\\
&=e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}E(f(x^{(b)}(s)))_{b=x^{(a)}(t)}ds\\
&=e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\lambda s}E\{f(x^{(a)}(t+s))/\boldsymbol{B}_t\}ds\\
&=\int_t^\infty e^{-\lambda s}E\{f(x^{(a)}(s))/\boldsymbol{B}_t\}ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\{Y(t+u)/\boldsymbol{B}_t\}&=\int_{t+u}^\infty e^{-\lambda s}E\{E\{f(x^{(a)}(s))/\boldsymbol{B}_{t+u}\}/\boldsymbol{B}_t\}ds\\
&=\int_{t+u}^\infty e^{-\lambda s}E\{f(x^{(a)}(s))/\boldsymbol{B}_t\}ds\ (\because\ \boldsymbol{B}_{t+u}\supset\boldsymbol{B}_t)\\
&\leqslant\int_t^\infty e^{-\lambda s}E\{f(x^{(a)}(s))/\boldsymbol{B}_t\}ds=Y(t).
\end{aligned}$$

因此, $Y(t)$ 对 $\boldsymbol{B}_t, t\geqslant 0$ 是 Semi-Martingale (§34). 又

$$\begin{aligned}
EY(t)&=e^{-\lambda t}E\{R_\lambda f(x^{(a)}(t))\}=e^{-\lambda t}\int_R R_\lambda f(x)P(t,a,dx)\\
&=e^{-\lambda t}T_tR_\lambda f(a).
\end{aligned}$$

由于 $x^{(a)}(t)$ 可分,故 $R_\lambda f(x^{(a)}(t))$,因之 $Y(t)$ 可分。故利用 § 34

定理1得

$$P(\mathfrak{A}(Y))=1,\ P(\mathfrak{B}_t(Y))=1,\ 0\leqslant t<\infty,$$

这里

$$\mathfrak{A}(Y)=\text{“对一切}\ t,\ Y(t-0)\ \text{和}\ Y(t+0)\text{存在”},$$
$$\mathfrak{B}_t(Y)=\text{“}Y(t-0)=Y(t)=Y(t+0)\text{”}.$$

因此

$$P\{\mathfrak{A}(R_\lambda f(x^{(a)}(\cdot)))\}=1,\ P\{\mathfrak{B}_t(R_\lambda f(x^{(a)}(\cdot)))\}=1.$$

由于 $\lambda R_\lambda f(x)$ 当 $\lambda\to\infty$ 时一致收斂于 $f(x)$，故

$$P\{\mathfrak{A}(f(x^{(a)}(\cdot)))\}=1,\ P\{\mathfrak{B}_t(f(x^{(a)}(\cdot)))\}=1. \quad (42.1)$$

設 f_n, $n=1, 2, \cdots$为 C 内非負函数列，且分离 R 中不同的两点，则映象

$$R\ni x\to \boldsymbol{f}(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots)\in\prod_n [0, \|f_n\|]\equiv K$$

是連續一对一的。此处設 K 中的拓扑为弱拓扑。由于 R 是紧致的 Hausdorff 空間，故逆映象也連續，这个对应为同胚(位相同型)。因各个 f_n 都滿足(42.1)，又可数多个概率为1的集的交的概率也是1，故

$$P(\mathfrak{A}(f_n(x^{(a)}(\cdot))),\ n=1, 2, \cdots)=1,$$
$$P(\mathfrak{B}_t(f_n(x^{(a)}(\cdot))),\ n=1, 2, \cdots)=1.$$

由 K 的弱拓扑的定义，有

$$P(\mathfrak{A}(\boldsymbol{f}(x^{(a)}(\cdot))))=1,\ P(\mathfrak{B}_t(\boldsymbol{f}(x^{(a)}(\cdot))))=1.$$

因为 $x\leftrightarrow \boldsymbol{f}(x)$ 是拓扑对应，故

$$P(\mathfrak{A}(x^{(a)}(\cdot)))=1,\ P(\mathfrak{B}_t(x^{(a)}(\cdot)))=1.$$

定理証完。

对于可分 Markoff 过程 $x^{(a)}(t)$，若定义

$$\tilde{x}^{(a)}(t)=x^{(a)}(t+0),$$

则由上定理，$\tilde{x}^{(a)}(t)$ 的样本过程至多只有第一类不連續点，而且 $\tilde{x}^{(a)}(t)$在弱的意义下(§13)与 $x^{(a)}(t)$一致。($f(t+0)$ 和 $f(t-0)$ 存

在，而 $f(t+0)=f(t)\neq f(t-0)$ 时，t 称为 f 的**第一类不連續点**。）因此，不妨假定 Markoff 过程的样本过程至多只有第一类不連續点，以后总設这假定成立。又样本过程以概率 1 連續时，则称为**扩散过程** (diffusion process)。

§43 Markoff 过程(3) 强 Markoff 性

在 §41 中，已就 Markoff 性作了說明，卽若已知在某时刻 t 的状态，则将来变动的概率法则与过去无关，而好象从 t 时所处的状态出发一样。这里 t 虽然是任意的，但它却是一个常数，下面将考虑 t 是随机变数的情形，并研究同样的性质能否成立。对于任意的随机变数 t 虽不成立，但可以証明，对于所謂 Markoff 时間的特殊的随机变数 $\tau(\omega)$ 是成立的。

定义 1 称 $\tau=\tau^{(a)}(\omega)$ 为 $x^{(a)}(t,\omega)$，$0\leqslant t<\infty$ 的 **Markoff 时間** (Markoff time)，如果 τ 是取值于 $[0,\infty]$ 中的随机变数，而且对于任意的 $t>0$，

$$\{\omega/\tau^{(a)}(\omega)<t\}\in \boldsymbol{B}_t \quad (\text{卽 } \boldsymbol{B}_t^{(a)}).$$

允許 $\tau=\infty$，特别如 $P(\tau<\infty)=1$，则称它为**有限 Markoff 时間**。

前面对任意常数 t，定义了 $\boldsymbol{B}_t$．現在推广到 Markoff 时間 τ，而有

定义 2 若 τ 是 $x^{(a)}(t)$ 的 Markoff 时間，则以 $\boldsymbol{B}_\tau(=\boldsymbol{B}_\tau^{(a)})$ 表示包含所有形如 $E_\alpha\cap\{\omega/\tau\geqslant\alpha\}$，$(\alpha>0,\ E_\alpha\in\boldsymbol{B}_\alpha)$ 的 ω 集的最小 Borel 体，并称为"由 $x^{(a)}(t)$，$t\leqslant\tau$，决定的 Borel 体"。

(i) 强 Markoff 性的最簡单的情形如下：

設 τ 为 $x^{(a)}(t)$ 的有限 Markoff 时間，则

$$\begin{aligned}P(x^{(a)}(t+\tau)\in E/\boldsymbol{B}_\tau)&=P(x^{(b)}(t)\in E)_{b=x^{(a)}(\tau)}\\&=P(t,\ x^{(a)}(\tau),\ E),\end{aligned}$$

对有限 $(\boldsymbol{B}_R)$ 可測函数 $f(x)$，有

$$E\{f(x^{(a)}(t+\tau))/\boldsymbol{B}_\tau\}=E\{f(x^{(b)}(t))\}_{b=x^{(a)}(\tau)}.$$

只須对 f 为連續函数的情形証明上式。此时,右边化为 $T_t f(x^{(a)}(\tau))$。为了証明这一点,只要証对于 $M\in\boldsymbol{B}_\tau$,

$$E\{f(x^{(a)}(\tau+u));M\}=E\{T_u f(x^{(a)}(\tau));M\} \tag{43.1}$$

即可。由于两边对 M 可加,故又只須在 $M=E_\alpha\cap\{\omega/\alpha\leqslant\tau<\beta\}$ 时証明上式即可。令

$$\alpha_{ni}=\alpha+\frac{i}{n}(\beta-\alpha),\tau^{(n)}=\alpha_{ni}\ (\text{在 }\alpha_{n,i-1}\leqslant\tau<\alpha_{ni}\text{ 时}).$$

显然 $\tau^{(n)}\downarrow\tau$,因而,由于 $x^{(a)}(t)$ 的右連續性(見上节)得

$$x^{(a)}(\tau+u)=\lim_{n\to\infty}x^{(a)}(\tau^{(n)}+u).$$

$$A=E\{f(x^{(a)}(\tau^{(n)}+u));\ E_\alpha\cap\{\alpha\leqslant\tau<\beta\}\}$$

$$=\sum_{i=1}^n E\{f(x^{(a)}(\alpha_{n,i}+u));\ E_\alpha\cap\{\alpha_{n,i-1}\leqslant\tau<\alpha_{n,i}\}\},$$

由于 $\alpha\leqslant\alpha_{n,i-1}<\alpha_{n,i}$,故 E_α, $\{\omega/\tau<\alpha_{n,i-1}\}$, $\{\omega/\tau<\alpha_{n,i}\}$ 都属于 $\boldsymbol{B}_{\alpha_{n,i}}$,所以 $E_\alpha\cap\{\alpha_{n,i-1}\leqslant\tau<\alpha_{n,i}\}$ 也属于 $\boldsymbol{B}_{\alpha_{n,i}}$。因此

$$A=\sum_{i=1}^n E\{E\{f(x^{(a)}(\alpha_{n,i}+u))/\boldsymbol{B}_{\alpha_{n,i}}\};\ E_\alpha\cap\{\alpha_{n,i-1}\leqslant\tau<\alpha_{n,i}\}\},$$

利用 Markoff 性

$$=\sum_{i=1}^n E\{T_u f(x^{(a)}(\alpha_{n,i}));E_\alpha\cap\{\alpha_{n,i-1}\leqslant\tau<\alpha_{n,i}\}\}$$

$$=E\{T_u f(x^{(a)}(\tau^{(n)}));E\alpha\cap(\alpha\leqslant\tau<\beta)\}.$$

因为 $T_t f(x)$ 与 $f(x)$ 都連續,故令 $n\to\infty$ 即得(43.1)。

(ii) 推广上面的結果得

$$P\{x^{(a)}(\tau+u_1)\in E_1,\ \cdots,\ x^{(a)}(\tau+u_n)\in E_n/\boldsymbol{B}_\tau\}$$

$$=P\{x^{(b)}(u_1)\in E_1,\ \cdots,\ x^{(b)}(u_n)\in E_n\}_{b=x^{(a)}(\tau)}.$$

更一般地,对 $\Xi\in\boldsymbol{B}(R^{[0,\infty)})$,

$$P\{x^{(a)}(\tau+\cdot)\in\Xi/\boldsymbol{B}_\tau\}=P\{x^{(b)}(\cdot)\in\Xi\}_{b=x^{(a)}(\tau)}.$$

至于数学期望,則对 $R^{[0,\infty)}$ 上的有界($\boldsymbol{B}(R^{[0,\infty)})$)可测函数 f,有

$$E\{f(x^{(a)}(\tau+\cdot))/\boldsymbol{B}_\tau\}=E\{f(x^{(b)}(\cdot))\}_{b=x^{(a)}(\tau)}.$$

只須証明后式。若注意两边对于 f 是可加的，則只要对 f 是一坐标上的連續函数的有限积的情况証明就够了。这里只設 f 是两个函数的积，一般情形，可用同样方法証明。

要証的是：对于 R 上的連續函数 f_1, f_2 及 $0<u_1<u_2$，有

$$E\{f_1(x^{(a)}(\tau+u_1))f_2(x^{(a)}(\tau+u_2))/\boldsymbol{B}_\tau\}$$
$$=E\{f_1(x^{(b)}(u_1))f_2(x^{(b)}(u_2))\}_{b=x^{(a)}(\tau)}.$$

証明方法同(i)，但这时要注意的是

$$g_1(x)=T_{u_2-u_1}f_2(x),\quad g_2(x)=f_1(x)g_1(x),\quad g_3(x)=T_{u_1}g_2(x)$$

都是連續函数，且若 $s_1<s_2$，則 $\boldsymbol{B}_{s_1}\subset\boldsymbol{B}_{s_2}$，因此

$$E(E(\cdot/\boldsymbol{B}_{s_2})/\boldsymbol{B}_{s_1})=E(\cdot/\boldsymbol{B}_{s_1}).$$

(iii) 利用强 Markoff 性，可得到下述常用的性质。設 $\tau=\tau^{(a)}(\omega)$ 是 $x^{(a)}(t)$ 的有限 Markoff 时間，令

$$P^0(t,a,dy)=P(x^{(a)}(t)\in dy,\ \tau>t),$$

$$T_t^0 f(a)=\int_R f(y)P^0(t,a,dy),$$

$$R_\lambda^0 f(a)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t^0 f(a)\,dt,$$

$$\varphi^{(a)}(ds,dy)=P(\tau\in ds, x^{(a)}(\tau)\in dy),$$

$$\hat{\varphi}^{(a)}(\lambda,dy)=\int_0^\infty e^{-\lambda s}\varphi(ds,dy),$$

則

$$R_\lambda f(a)=R_\lambda^0 f(a)+\int_{y\in R}R_\lambda f(y)\,\hat{\varphi}^{(a)}(\lambda,dy),\tag{43.2}$$

$$T_t f(a)=T_t^0 f(a)+\int_{y\in R}\int_{s=0}^t T_{t-s}f(y)\,\varphi^{(a)}(ds,dy).\tag{43.3}$$

設 $[0,s)$ 的示性函数为 $c_s(t)$，則

$$E\{f(x^{(a)}(t));\tau>t\}=E\{f(x^{(a)}(t))c_\tau(t)\}$$
$$=\int_R f(y)P^0(t,a,dy)=T_t^0 f(a),$$

$$E\left\{\int_0^\tau e^{-\lambda t}f(x^{(a)}(t))dt\right\}=E\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x^{(a)}(t))c_\tau(t)dt\right\}$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}E\{f(x^{(a)}(t))c_\tau(t)\}dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t^0 f(a)dt=R_\lambda^0 f(a).$$

$$R_\lambda f(a)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}E\{f(x^{(a)}(t))\}dt$$

$$=E\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x^{(a)}(t))dt\right\}$$

$$=E\left\{\int_0^\tau e^{-\lambda t}f(x^{(a)}(t))dt\right\}+E\left\{\int_\tau^\infty e^{-\lambda t}f(x^{(a)}(t))dt\right\}.$$

第1項 $=R_\lambda^0 f(a)$.

第2項 $=E\left\{e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x^{(a)}(\tau+t))dt\right\}$

$$=E\left\{e^{-\lambda\tau}E\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x^{(a)}(\tau+t))\,dt/\boldsymbol{B}_\tau\right\}\right\}$$

$$=E\left\{e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t}E\{f(x^{(a)}(\tau+t))/\boldsymbol{B}_t\}dt\right\}$$

$$=E\left\{e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t f(x^{(a)}(\tau))dt\right\}$$

$$=E\{e^{-\lambda\tau}R_\lambda f(x^{(a)}(\tau))\}$$

$$=\int_{t=0}^\infty\int_{y\in R}e^{-\lambda t}R_\lambda f(y)\varphi^{(a)}(dt,dy)$$

$$=\int_{y\in R}R_\lambda f(y)\hat{\varphi}^{(a)}(\lambda,dy).$$

故 (43.2) 得証。若取 (43.3) 右边(关于 t)的 Laplace 変換，則得 (43.2) 的右边，因而等于 $R_\lambda f(a)$. 由于 $R_\lambda f(a)$ 等于 $T_t f(a)$ 的 Laplace 変換，故(43.3)得証。

§44 Markoff 时間

茲列举 Markoff 时間的性質以及例子如下：

(i) 若 τ_1, τ_2 是 Markoff 时間，則 $\max(\tau_1, \tau_2)$, $\min(\tau_1, \tau_2)$

也是 Markoff 时間。因为

$$\{\omega/\max(\tau_1, \tau_2)<t\}=\{\omega/\tau_1<t\}\cap\{\omega/\tau_2<t\},$$

$$\{\omega/\min(\tau_1, \tau_2)<t\}=\{\omega/\tau_1<t\}\cup\{\omega/\tau_2<t\}.$$

(ii) 若 $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\cdots$ 都是 Markoff 时間，則 $\tau=\lim\tau_n$ 也是 Markoff 时間。因为

$$\{\omega/\tau<t\}=\bigcup_n\bigcap_m\left\{\omega/\tau_m<t-\frac{1}{n}\right\}.$$

(iii) 若 $\tau_1\geqslant\tau_2\geqslant\cdots$ 都是 Markoff 时間，則 $\tau=\lim\tau_n$ 也是 Markoff 时間。因为

$$\{\omega/\tau<t\}=\bigcup_n\{\omega/\tau_n<t\}.$$

(iv) $\tau(\omega)\equiv t$ 是 Markoff 时間。

(v) **Dynkin 引理** 若 τ 是有限 Markoff 时間，則

$$f(a)=-E\int_0^\tau Af(x^{(a)}(t))\,dt+Ef(x^{(a)}(\tau)),\quad f\in\mathfrak{D}(A).$$

証明 令 $h_\lambda=\lambda f-Af$，則 $f=R_\lambda h_\lambda$.

$$\begin{aligned}f(a)=R_\lambda h_\lambda(a)&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t h_\lambda(a)\,dt\\&=E\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}h_\lambda(x^{(a)}(t))\,dt\right\}\\&=E\left\{\int_0^\tau\right\}+E\left\{\int_\tau^\infty\right\}=A_\lambda+B_\lambda.\end{aligned}$$

因为当 $\lambda\to0$ 时，$h_\lambda\to-Af$，所以

$$A_\lambda\to-E\int_0^\tau Af(x^{(a)}(t))\,dt,$$

$$\begin{aligned}B_\lambda&=E\left\{e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t}h_\lambda(x^{(a)}(\tau+t))\,dt\right\}\\&=E\left\{e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t}E(h_\lambda(x^{(a)}(\tau+t))/\boldsymbol{B}_\tau)\,dt\right\}\\&=E\left\{e^{-\lambda\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t h_\lambda(x^{(a)}(\tau))\,dt\right\}\end{aligned}$$

$$=E\{e^{-\lambda\tau}R_\lambda h_\lambda(x^{(a)}(\tau))\}$$
$$=E\{e^{-\lambda\tau}f(x^{(a)}(\tau))\}\to E\{f(x^{(a)}(\tau))\}.$$

(vi) 令 F 为 R 的閉集。$x^{(a)}(t)$ 跑出 F 的时刻的下限称为 F 的**最初通过时間**(first passage time),記为 $\tau_F=\tau_F^{(a)}(\omega)$. $x^{(a)}(t)$ 在 τ_F 以前处于 F 上,在 τ_F 与 $\tau_F+\varepsilon$ 間一定会自 F 跑出。在 τ_F 时 $x^{(a)}(t)$是否位于F上尙不知道。若$x^{(a)}(t)$在$t=\tau_F$时連續,則$x^{(a)}(\tau_F)$处于 F 的边界(包含于 F)上。τ_F 是 Markoff 时間。因为

$$\{\omega/\tau_F<t\}=\bigcup_{s<t}\{\omega/x^{(a)}(s,\omega)\in F^c\}$$
$$=\bigcup_{r<t}\{\omega/x^{(a)}(r,\omega)\in F^c\}$$

(这里 r 是有理数)。由于 F^c 是开集,且 $x^{(a)}(s,\omega)$ 右連續,故后一等号显然成立。右項是属于 $\boldsymbol{B}_t$ 的集的可数和,故仍属于 $\boldsymbol{B}_t$.

(vii) 令 U 为 R 的开集。U 的最初通过时間 τ_U 可与 τ_F 同样定义。

根据 R 的拓扑性質,考慮由內部逼近 U 的閉集列

$$F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots\to U$$

便得

$$\tau_{F_1}\leqslant\tau_{F_2}\leqslant\cdots\to\tau_U.$$

故由(vi)与(ii)可知,τ_U 也是 Markoff 时間。

(viii) 在上述(vi)中,特别当 F 是一点 a 时,試考慮 $\tau=\tau_F^{(a)}(\omega)$. 此为从 a 出发的 $x^{(a)}(t)$ 最初离开 a 的时間;或者也可叫做停留于 a 的时間。試求 τ 的分布。設

$$p(t)=P(\tau>t),$$

利用 Markoff 性可得

$$p(t+s)=p(t)p(s).$$

实际上,

$$p(t+s)=P(x^{(a)}(u)=a,\ 0\leqslant u\leqslant t+s)$$

$$=P(x^{(a)}(u)=a,\ 0\leqslant u\leqslant t;\ x^{(a)}(t+v)=a,\ 0\leqslant v\leqslant s)$$
$$=E\{P(x^{(a)}(t+v)=a,\ 0\leqslant v\leqslant s/\boldsymbol{B}_t);\ x^{(a)}(u)=a,\ 0\leqslant u\leqslant t\}$$
$$=E\{P(x^{(b)}(v)=a,\ 0\leqslant v\leqslant s)_{b=x^{(a)}(t)};\ x^{(a)}(u)=a,\ 0\leqslant u\leqslant t\}$$
$$=E\{P(x^{(a)}(v)=a,\ 0\leqslant v\leqslant s);\ x^{(a)}(u)=a,\ 0\leqslant u\leqslant t\}$$
$$=p(s)\cdot p(t).$$

因此，除去 $p(t)\equiv 0$ 的情形，常有 $p(t)>0$, $p(t)\leqslant 1$，在后一情形，$p(t)=e^{-\lambda t}$ $(\lambda\geqslant 0)$. 当 $\lambda=0$ 时，$p(t)\equiv 1$. 当 $\lambda>0$ 时，$p(t)$ 当 t 由 0 增至 ∞ 时由 1 减至 0．当 $p(t)\equiv 0$ 时，从 a 出发，在次一瞬时卽自 a 跑出。亦卽，无論 ε 为如何小的正数，在 $0<t<\varepsilon$ 之間，总会有些时刻离开 a．此时 a 称为**瞬时状态**(instantaneous state)，或称为**瞬时逗留点**。

当 $p(t)\equiv 1$ 时，則从 a 出发，永远不能离开 a．此时称 a 为**套点**(trap)。

当 $p(t)=e^{-\lambda t}$ $(\lambda>0)$ 时，τ 的分布是**指数型**（exponential type），τ 称为**指数型逗留时間**（exponential holding time, exponential waiting time)，a 称为**指数型逗留点**。

下列四条件相互等价：

(A) a 是套点，

(B) $P(t,a,E)=\delta(a,E)$, $t>0$,

(C) $T_tf(a)=f(a)$, $t>0$, $f\in C$,

(D) $Af(a)=0$, $f\in\mathfrak{D}(A)$.

(A)→(B)→(C)→(D) 显然。若假定(D)，則对于 $f\in\mathfrak{D}(A)$，因有 $T_tf\in\mathfrak{D}(A)$，故

$$\frac{dT_tf(a)}{dt}=AT_tf(a)=0,$$

且得 $T_tf(a)=f(a)$. 因 $\overline{\mathfrak{D}(A)}=C$，故得 (C). (C)→(B) 显然。若假定(B)，則

$$P(x^{(a)}(t)=a)=1,\quad t>0.$$

故 $P(x^{(a)}(t)=a,\ t$ 为正有理数$)=1$. 因为 $x^{(a)}(t)$ 右連續，故 $P(x^{(a)}(t)=a,\ t>0)=1$，这表示 a 为套点。

(ix) 扩散过程沒有指数型逗留点。

証明 若 a 不是套点，則有 $f\in\mathfrak{D}(A)$ 使 $Af(a)\neq 0$. 設离开 a 的最初时間为 τ，則 τ 是有限 Markoff 时間。因扩散过程是連續的，所以 $x^{(a)}(\tau)=a$. 故由(v)中 Dynkin 引理推出

$$f(a)=-Af(a)\cdot E(\tau)+f(a),\quad \text{即}\quad E(\tau)=0,$$

因此 $P(\tau=0)=1$. 这表示 a 是瞬时逗留点。

(x) 若 a 是 M（閉或开集）的內点，則 $E(\tau_M^{(a)})>0$.

証明 若 $E(\tau_M^{(a)})=0$，則 $P(\tau_M^{(a)}=0)=1$. 因此

$$P(x^{(a)}(0+)\notin M^i)=1.$$

然而 $P(x^{(a)}(0+)=a)=1$，与 $a\in M^i$ 矛盾。

(xi) 若 a 不是套点，則有 a 的邻域 U，使对于 $b\in U$，$E(\tau_U^{(b)})$ 为一致有界。特别在扩散过程时，对任意 ε，可适当地选取 U，使 $E(\tau_U^{(b)})<\varepsilon$，$b\in U$. 但后一性质对一般的 Markoff 过程未必成立。

証明 因 a 不是套点，故存在 $f\in\mathfrak{D}(A)$ 使 $Af(a)\neq 0$. 如有必要可取 $-f$ 而得 $Af(a)>0$. 因 Af 連續，故存在正数 α 及 a 的邻域 U，使 $Af(b)>\alpha$，$b\in U$. 由上述 Dynkin 引理得

$$f(b)\leqslant -\alpha E(\tau_U^{(b)})+\|f\|,\quad \text{即}\quad E(\tau_U^{(b)})\leqslant\frac{1}{\alpha}(\|f\|-f(b))<\infty.$$

特别对扩散过程，有 $x^{(b)}(\tau_U^{(b)})\in\overline{U}$. 由于 f 的連續性，f 在 $\overline{U}$ 中的变差可以限制得小于 $\alpha\varepsilon$. 故 $f(x^{(b)}(\tau_U^{(b)}))<f(b)+\alpha\varepsilon$. 由 Dynkin 引理得

$$f(b)<-\alpha E(\tau_U^{(b)})+(f(b)+\alpha\varepsilon),\quad \text{故}\quad E(\tau_U^{(b)})<\varepsilon.$$

对一般情形未必如此，例如考虑指数型逗留点 a，无論 U 取得多么小，$\tau_U^{(a)}$ 总比 a 的逗留时間 τ 大，且因 $E(\tau)>0$，故不能使

$E(\tau_U^{(a)})$ 小于 $E(\tau)$。含有指数型逗留点的 Markoff 过程的存在見后。

§ 45 Dynkin 关于生成算子的定理

前已説明:

“轉移概率 $P(t, x, E) \leftrightarrow$ 半群 $T_t \leftrightarrow$ Markoff 过程 $x^{(a)}(t)$”,这个对应关系是一对一的。T_t 的生成算子 A 既叫做 $P(t,x,E)$ 的生成算子,又叫做 $x^{(a)}(t)$ 的生成算子。利用 $x^{(a)}(t)$ 来定义 A 就是下述的 Dynkin 定理。

定理 1 令 U 为 a 的邻域,$\tau=\tau_U^{(a)}$. 設

$$Df(U)=\frac{E(f(x^{(a)}(\tau)))-f(a)}{E(\tau)},$$

(当 $E(\tau)=\infty$ 时,令 $Df(U)=0$). 則对 $f\in\mathfrak{D}(A)$ 有

$$Df(U)\to Af(a) \quad (U\to a). \tag{45.1}$$

又若当 $U\to a$ 时, $Df(U)$ 逼近于 a 的連續函数,則 $f\in\mathfrak{D}(A)$,从而上面的(45.1)成立。

$Df(U)\to Af(a)$ 的詳細内容是: 如取 U 足够小, 则

$$|Df(U)-Af(a)|\leqslant\sup_{b\in U}|Af(b)-Af(a)|. \tag{45.2}$$

証明 若 a 是套点,則(45.2)的左边为 0, 故成立。若 a 不是套点,则由于 τ 是有限 Markoff 时間,故由 Dynkin 引理,有

$$f(a)=-E\int_0^\tau Af(x^{(a)}(t))dt+Ef(x^{(a)}(\tau)).$$

因 a 非套点,故 U 充分小时,有 $E(\tau)<\infty$. 又因 a 是 U 的内点,故 $E(\tau)>0$. 由上式得

$$\left|\frac{Ef(x^{(a)}(\tau))-f(a)}{E(\tau)}-Af(a)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{E(\tau)}E\int_0^\tau|Af(x^{(a)}(t))-Af(a)|dt$$

$$\leqslant \sup_{b\in U}|Af(b)-Af(a)|\to 0 \qquad (U\to a).$$

以 $\widetilde{\mathfrak{D}}$ 表示使 $Df(U)$ 逼近于 a 的連續函数 f 的全体，对这样的 f 定义 $\lim Df(U)$ 为 $\widetilde{A}f$，由上述得 $\widetilde{A}\supset A$。現在指出 $\lambda-\widetilde{A}$ 是一一对应的。为此只要由 $\widetilde{A}u=\lambda u$ 引出 $u=0$。若令 $u(x)$ 的最小值为 $u(a)$，則由 $\widetilde{A}$ 的定义得 $\widetilde{A}u(a)\geqslant 0$，故 $\lambda u(a)\geqslant 0$，卽 $u(a)\geqslant 0$，且常有 $u(x)\geqslant 0$。又因 $\widetilde{A}(-u)=\lambda(-u)$，故 $-u(x)\geqslant 0$，于是 $u(x)\equiv 0$。从而了解到 $(\lambda-\widetilde{A})^{-1}$ 的存在。又由 $\widetilde{A}\supset A$ 得

$$(\lambda-\widetilde{A})^{-1}\supset(\lambda-A)^{-1}=R_\lambda,\quad \mathfrak{D}(R_\lambda)=\boldsymbol{C},$$

故 $\supset$ 变为等号 $=$，因此 $\widetilde{A}=A$。故得 $\widetilde{\mathfrak{D}}=\mathfrak{D}(A)$。

今将上述的 $Df(U)$ 变成其他形式，設

$$\pi_U(a, dy)=P(x^{(a)}(\tau)\in dy).$$

这测度的負荷点显然被含于 U^c（尤其是扩散过程时，則被含于 U 的边界 ∂U）。有

$$Df(U)=\left\{\int_{U^c}\pi_U(a, dy)f(y)-f(a)\right\}\Big/E(\tau). \qquad (45.3)$$

又为了改写 $E(\tau)$，引进記号 $p_U(a)=E(\tau_U^{(a)})$，($a\in U^c$ 时，$\tau_U^{(a)}\equiv 0$，因此令 $p_U(a)=0$)。

令 $U\subset V$。試証

$$p_V(a)=p_U(a)+\int\pi_U(a, dy)p_V(y). \qquad (45.4)$$

在 $R^{[0,\infty)}$ 上能取 $(\boldsymbol{B}(R^{[0,\infty)}))$ 可測函数 ϕ_V，使

$$\tau_V^{(a)}=\phi_V(x^{(a)}(\cdot)).$$

为此，首先对閉集 F 令

$$\phi_F(\xi)=\inf\{t/\xi(t)\in F^c,\ t\ \text{为有理数}\},$$

則由 $x^{(a)}(t)$ 的右連續性与 F^c 是开集，得 $\tau_F^{(a)}=\phi_F(x^{(a)}(\cdot))$。对开集 V，取由內部逼近于此开集的閉集列 $F_1\subset F_2\subset\cdots\to V$，幷令

$$\phi_V(\xi)=\lim_{n\to\infty}\phi_{F_n}(\xi),$$

则得 $\tau_V^{(a)}=\phi_V(x^{(a)}(\cdot))$，且

$$\tau_V^{(a)}=\tau_U^{(a)}+\tau_V^{(a)}-\tau_U^{(a)}$$
$$=\tau_U^{(a)}+\phi_V(x^{(a)}(\tau_U^{(a)}+\cdot)).$$

考虑强 Markoff 性得

$$\begin{aligned}E(\tau_V^{(a)})&=E(\tau_U^{(a)})+E\{\phi_V(x^{(a)}(\tau_U^{(a)}+\cdot))\}\\&=E(\tau_U^{(a)})+E\{E\{\phi_V(x^{(a)}(\tau_U^{(a)}+\cdot))/\boldsymbol{B}_{\tau_U}^{(a)}\}\}\\&=E(\tau_U^{(a)})+E\{E\{\phi_V(x^{(b)}(\cdot))\}_{b=x^{(a)}(\tau_U^{(a)})}\}\\&=E(\tau_U^{(a)})+E\{E(\tau_V^{(b)})_{b=x^{(a)}(\tau_U^{(a)})}\},\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}p_V(a)&=p_U(a)+E\{p_V(x^{(a)}(\tau_U^{(a)}))\}\\&=p_U(a)+\int p_V(y)\pi_U(a,dy).\end{aligned}$$

由此得証(45.4)。因为上述的 $E(\tau)$ 即 $p_U(a)$，故

$$E(\tau)=p_V(a)-\int\pi_U(a,dy)p_V(y).$$

由此得

$$Df(U)=\frac{\int\pi_U(a,dy)f(y)-f(a)}{\int\pi_U(a,dy)(-p_V(y))-(-p_V(a))}. \qquad (45.5)$$

§ 46 Markoff 过程的例

下面将应用以上数节的理論，来重新討論 § 35 及 § 40 所举对应于轉移概率的 Markoff 过程的例。

例 1 有限个状态的 Markoff 过程(Markoff process with finite states)。首先考虑 § 35 的例 1 (或 § 40 的例 1)。記号如前。但用 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 表示 R 中的点。因为 $x^{(i)}(t)$ 的样本过程是从 i 出发，且至多只有第一类不連續点的函数，又所取的值只是 $1, 2, \cdots, n$，故 $x^{(i)}(t)$ 必为梯形函数。若自 i 出发，作如下运动：在长为

τ 的一段时間内,停留于 i, 然后轉移到另一 j, 再在此停留一段时間,又轉移到另一 k. 因只由一点 i 所构成的集可以看作开集,故得 $E(\tau)>0$, 亦卽, i 不能为瞬时逗留点。故 i 或为指数型逗留点,或为套点。若为套点,則不論 f 如何, $Af(i)$ 总为 0, 故得

$$a_{ij}=0, \quad j=1, 2, \cdots, n.$$

若为指数型逗留点,則 $P(\tau>t)=e^{-\lambda_i t}$, $E(\tau)=1/\lambda_i$. 由此可証 λ_i 和 a_{ij} 的关系为

$$\lambda_i=\sum_{j\neq i} a_{ij}=-a_{ii}. \tag{46.1}$$

为此,令 t 充分小, 由 A 的定义有

$$p(t, i, i)=1+a_{ii}t+o(t). \tag{46.2}$$

又由 τ 的意义得

$$p(t, i, i)=e^{-\lambda_i t}+\varepsilon. \tag{46.3}$$

此处 ε 是曾离开 i 再回到原处,且在 t 时处于 i 的概率,此事件之出現至少需要二次跳跃, 故其数量級至少为 $O(t^2)$ (用强 Markoff 性可得到严格証明)。故(46.3)变为

$$p(t, i, i)=1-\lambda_i t+o(t). \tag{46.4}$$

以此与 (46.2) 比較卽得 $\lambda_i=-a_{ii}$. 由 $x^{(i)}(t)$ 的右連續性, 可知 $x^{(i)}(\tau)$ 是从 i 經第一次轉移后所处的新状态, 故其值 j 不同于 i, 其概率为

$$P(x^{(i)}(\tau)=j)=a_{ij}/\lambda_i. \tag{46.5}$$

为此,考虑

$$P\{x^{(i)}(\tau)=j,\ \tau<T\}=\sum_{k=1}^{n} P\left\{x^{(i)}(\tau)=j,\ \frac{k-1}{n}T\leqslant\tau<\frac{k}{n}T\right\}.$$

对足够大的 n, 在 $\left[\frac{k-1}{n}T, \frac{k}{n}T\right]$, $k=1, 2, \cdots, n$, 中的任一个区間内发生不少于二次跳跃的概率非常小(因为 $x^{(i)}(t)$ 是梯形函数, 故在长为 T 的时間内的跳跃次数是有限的), 故

$$= \sum_{k=1}^{n} P\left\{x^{(i)}(t) \equiv i,\ t \leqslant \frac{k-1}{n} T;\ x^{(i)}\left(\frac{k}{n} T\right) = j\right\} + o(1).$$

由 Markoff 性

$$= \sum_{k=1}^{n} P\left\{x^{(i)}(t) \equiv i,\ t \leqslant \frac{k-1}{n} T\right\} P\left\{x^{(i)}\left(\frac{T}{n}\right) = j\right\} + o(1).$$

但

$$P\left(x^{(i)}\left(\frac{T}{n}\right) = j\right) = p\left(\frac{T}{n},\ i,\ j\right) = a_{ij}\frac{T}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

故

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda_i \frac{k-1}{n} T} a_{ij}\frac{T}{n} + n o\left(\frac{1}{n}\right) + o(1)$$

$$\to \int_0^T e^{-\lambda_i t} a_{ij}\, dt = \frac{a_{ij}}{\lambda_i}\left(1 - e^{-\lambda_i T}\right).$$

令 $T \to \infty$ 即得(46.5)。

于是，$x^{(i)}(t)$ 的运动如下进行：自 i 出发，經过指数型逗留时間(其平均值为 $\lambda_i^{-1} = (\sum_{j \neq i} a_{ij})^{-1}$) 后，以概率 a_{ij}/λ_i 轉入 j. 如果一切 $a_{ij} = 0$ $(j \neq i)$，則 i 是套点。否則，轉入 j 后又同样地运动以轉入另一 k. 如一旦轉入套点，則永久停留于其上。

利用 Dynkin 定理，可立刻求出(46.1)与(46.5)。i 点本身可以視为逼近于 i 的开集。只需考虑 i 不是套点的情况。因已知在 i 的逗留时間 τ 是指数型，故令其平均值为 λ_i^{-1} 后，其分布为 $P(\tau > t) = e^{-\lambda_i t}$. 若令 $P(x^{(i)}(\tau) = j)$ 为 π_{ij}，則这相当于 Dynkin 的 $\pi_U(a,\ dy)$. 故

$$Af(i) = \frac{\sum_{j \neq i} \pi_{ij} f(j) - f(i)}{\lambda_i^{-1}} = \sum_{j \neq i} \lambda_i \pi_{ij} f(j) - \lambda_i f(i).$$

另方面

$$Af(i) = \sum_{j \neq i} a_{ij} f(j) - a_{ii} f(i).$$

二式比較即得

$$\lambda_i = -a_{ii}\left(= \sum_{j \neq i} a_{ij}\right), \quad \pi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\lambda_i}.$$

此卽 (46.1), (46.5)。

例2 Wiener 过程 令 $B(t, \omega)$ 为 Wiener 过程, 并令 $B(0, \omega)\equiv 0$. 若定义

$$x^{(a)}(t, \omega)=a+B(t, \omega),$$
$$x^{(\infty)}(t, \omega)\equiv\infty,$$

則得 $R=R^1\vee\{\infty\}$ 上一族随机过程, 它是以

$$P(t, x, E)=\int_E N_t(y-x)\,dy$$

为轉移概率的 Markoff 过程。以后称此过程为由 Wiener 过程导出的 Markoff 过程, 或簡称为 Wiener 过程。它是扩散过程。

例3 以0为反射壁(reflecting barrier)的 Wiener 过程。对前例中之 $x^{(a)}(t)$ 定义

$$y^{(a)}(t)=|x^{(a)}(t)|,\quad a\in[0, \infty].$$

此为与 §35 例3(卽 §40 例3)对应的 Markoff 过程, 也是扩散过程。

例4 圓周上的旋轉 考虑在周长为1的圓周上以速度1向正向旋轉的运动。圓周上的点由 mod 1 的实数决定, 而此运动則由

$$x^{(a)}(t, \omega)=a+t \pmod 1$$

决定, 它是与

$$P(t, a, E)=\delta(a+t, E)$$

对应的 Markoff 过程(見 §40 例4)。这也是扩散过程。若給定的初始值为 a, 則 $x^{(a)}(t, \omega)$ 等于 $a+t \pmod 1$ 而与 ω 无关, 此卽所謂**决定性的** (deterministic) 过程。

例5 若以 mod 1 来考虑 Wiener 过程(例2), 則得圓周上的 Markoff 过程, 称它为圓周上的 Wiener 过程。这也是扩散过程(見 §40, 例5)。

§47 对时間为齐次的可加过程

在上节例2中已說过, Wiener 过程可看成 $R=R^1\vee\{\infty\}$ 上

的 Markoff 过程，这可推广到一般的对时間为齐次的可加过程。

今設 $y(t,\omega)$，$0\leqslant t<\infty$ 为对时間为齐次的可加过程，$y(0,\omega)=0$. 令 $y(t,\omega)$ 的分布为 Φ_t. 对任意 $u>0$，这个分布就是 $y(u+t,\omega)-y(u,\omega)$ 的分布。由可加过程的性質有

$$\Phi_{t+s}=\Phi_t*\Phi_s. \tag{47.1}$$

Φ_t 为无穷可分分布，其特征函数 $\varphi_t(z)$ 由

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_t(z)=e^{t\psi(z)},\\&\psi(z)=imz-\frac{v}{2}z^2+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)\end{aligned}\right\} \tag{47.2}$$

决定，此处 m 是实数，$v\geqslant 0$，n 是滿足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^2}n(du)<\infty \tag{47.3}$$

的測度。

今若对 $a\in R=R^1\vee\{\infty\}$ 定义

$$x^{(a)}(t,\omega)=a+y(t,\omega),$$
$$x^{(\infty)}(t,\omega)=\infty,$$

则得 Markoff 过程，其轉移概率为

$$P(t,a,E)=\Phi_t(E(-)a),\quad E(-)a=\{\xi-a/\xi\in E\}. \tag{47.4}$$

若对此轉移概率写出 Chapman-Kolmogoroff 方程，则得 (47.1)。

此 Markoff 过程的半群为

$$T_tf(x)=\int\Phi_t(dy(-)x)f(y)=\int\Phi_t(dy)f(y+x), \tag{47.5}$$

Fourier 变换的算子 $\mathfrak{F}$ 定义为

$$\mathfrak{F}g(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}e^{izx}g(x)dx,\quad \mathfrak{F}d\mu(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}e^{izx}d\mu(x).$$

在广义函数的意义下取极限，$\mathfrak{F}$ 是广义函数的意义下的 Fourier 变式。对(47.5)两边施行 $\mathfrak{F}$ 得

$$\mathfrak{F}T_tf(x)=\varphi_t(-z)\mathfrak{F}f(z)=e^{t\psi(-z)}\mathfrak{F}f(z), \tag{47.6}$$

施行 Fourier 变换后，可見此半群有极簡單的形状。其次，对上式两边就 t 施行 Laplace 变換。因

$$\Re\psi(-z)=-\frac{v}{2}z^2+\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos zu-1)n(du)\leqslant 0,$$

故右边可以簡单地施行 Laplace 变换，左边則因 $\mathfrak{F}$ 可与 t 的 Laplace 变换先后交换，故得

$$\mathfrak{F}R_\lambda f(z)=\frac{1}{\lambda-\psi(-z)}\mathfrak{F}f(z). \tag{47.7}$$

又由(47.6)得

$$\mathfrak{F}Af(z)=\psi(-z)\mathfrak{F}f(z),$$

即

$$\mathfrak{F}Af(z)=\Big\{-imz-\frac{v}{2}z^2+\int\Big(e^{-izu}-1+\frac{izu}{1+u^2}\Big)n(du)\Big\}\mathfrak{F}f(z). \tag{47.8}$$

由 Fourier 变换的性質得

$$\mathfrak{F}f'(z)=-iz\mathfrak{F}f(z),\quad \mathfrak{F}f''(z)=-z^2\mathfrak{F}f(z),$$

$$\mathfrak{F}\Delta_u f(z)=(e^{-izu}-1)\mathfrak{F}f(z),\quad \text{此处}\quad \Delta_u f(x)=f(x+u)-f(x),$$

因此，若形式地求(47.8)两边的 Fourier 逆变换，則得

$$Af(x)=mf'(x)-\frac{v}{2}f''(x)+\int\Big(f(x+u)-f(x)-\frac{u}{1+u^2}f'(x)\Big)n(du). \tag{47.9}$$

欲求 $\mathfrak{D}(A)$ 以明确地規定 A，則相当麻煩。

§48 生灭过程

設有一团細菌，其个数按下述法則变化：設一个細菌在 dt 时間內分裂为 2 个的概率为 $p\,dt$ (差一高級无穷小)，在此段时間內死亡的概率为 $q\,dt$. 并設不同細菌的死亡、分裂为相互独立。今設在时刻 t 有 n 个，問在 $t+dt$ 时将有多少? l 个分裂与 m 个死亡的

概率为

$$\frac{n!}{l!\,m!\,(n-l-m)!}(p\,dt)^l(q\,dt)^m(1-(p+q)dt)^{n-l-m},$$

除 (A) $l=0,\ m=0$, (B) $l=1,\ m=0$, (C) $l=0,\ m=1$ 三个情形外，此概率都是 dt 的二阶以上的无穷小。$t+dt$ 时的細菌数在 (A) 为 n，在 (B) 为 $n+1$，在 (C) 为 $n-1$. 故經 dt 时后由 n 轉入 k 的概率 $P(dt, n, k)$ 为(差一高級无穷小)

$$\left.\begin{aligned} P(dt, n, n) &= 1-n(p+q)dt, \\ P(dt, n, n+1) &= \qquad np\,dt, \\ P(dt, n, n-1) &= \qquad nq\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{48.1}$$

若一度为 0，則永久为 0，故有

$$P(dt, 0, 0)=1. \tag{48.2}$$

这样的随机过程称为**生灭过程** (birth and death process)。若稍推广(48.1)而令

$$\left.\begin{aligned} P(dt, n, n) &= 1-(p_n+q_n)dt, \\ P(dt, n, n+1) &= \qquad p_n\,dt, \\ P(dt, n, n-1) &= \qquad q_n\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{48.1'}$$

也采用同样的名字。例如，随着 n 的加大，在食粮不易找到，分裂率降低，死亡率提高的情形下，自然地可設

$$p_1>\frac{p_2}{2}>\frac{p_3}{3}>\cdots, \quad q_1<\frac{q_2}{2}<\frac{q_3}{3}<\cdots. \tag{48.2'}$$

特别当 $q_n=0$ 时，叫做**純生过程** (pure birth process)，当 $p_n=0$ 时，叫做**純灭过程**(pure death process)。

若用所述的 Markoff 过程理論来处理这一过程，則存在着困难。因为現在状态空間是 $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，它不是紧致的。簡单的想法是，若添上 ∞ 而再規定

$$P(dt, \infty, \infty)=1$$

是否可以？这样做未必可行，如何克服此困难，将在以后叙述。

暂不顾这困难，与有限个状态时一样，可如下考虑这一过程：若自 n 出发，經指数型逗留时間 τ（其平均值为 $(p_n+q_n)^{-1}$）后，轉入 $n+1$ 或 $n-1$，其概率分别为 $p_n/(p_n+q_n)$，$q_n/(p_n+q_n)$。然后从新的状态 $n-1$ 或 $n+1$ 同样地継續运动。

首先考虑純灭过程。以后 q_n 都設为正，此时，細菌数逐漸減少，其个数終于为 0 而灭絕。今試求**灭絕时間**（extinction time）的分布，这是 Markoff 时間，但不深究。自 n 出发，按 $n\to n-1\to n-2\to\cdots\to 1\to 0$ 进行，若設停留于 k 的时間为 τ_k，則灭絕时間 ε_n 为

$$\varepsilon_n=\tau_n+\tau_{n-1}+\cdots+\tau_1,$$

其中 $\tau_n, \tau_{n-1}, \cdots, \tau_1$ 都是独立的，并且各服从于平均值为 $q_k^{-1}(k=n, n-1, \cdots, 1)$ 的指数分布 $F_k(t)=1-e^{-q_k t}$，故 ε_n 的分布就是其卷积。若求 ε_n 的平均值，則得

$$E(\varepsilon_n)=\sum_{k=1}^{n}E(\tau_k)=\sum_{k=1}^{n}q_k^{-1}<\infty,$$

因此 $P(\varepsilon_n<\infty)=1$，即不論从多么大的个数出发，迟早总会灭絕。

为了决定 $P(t,n,k)$，記分布 $F_k, \cdots, F_n$ 的卷积为 $F_{k,n}$。这显然是 $\tau_n+\tau_{n-1}+\cdots+\tau_k$ 的分布，$F_{k,n}(t)$ 就是在时間 t 以前个数減到不大于 $k-1$ 的概率。因此，經过时間 t 后自 n 轉移到 k 的概率为

$$P(t, n, k)=F_{k+1,n}(t)-F_{k,n}(t), \quad k=0, 1, 2, \cdots, n,$$

这里

$$F_{0,n}(t)=0, \quad F_{n+1,n}(t)=1.$$

为了要使状态空間添上 ∞ 后紧化为 R，除上述諸轉移概率外，还必須合理地定义 $P(t,\infty,k)$，$k=0, 1, 2, \cdots, \infty$。为此，对 R 上的連續函数 $f(n)$，必須使

$$T_t f(n)=\sum p(t, n, k)f(k)$$

連續。因为除 ∞ 外，R 中其他的点都是孤立点，所謂連續就是要求在 ∞ 的极限值与实际值相等。今特别取 $f(m)=\delta_{mk}$，这函数

对 $k\neq\infty$ 是連續的，此时因 $T_tf(n)=P(t, n, k)$，故必須要求

$$\lim_{n\to\infty}P(t, n, k)=P(t, \infty, k)\quad k\neq\infty.$$

为求此极限試先求 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{k,n}(t)$. $F_{k,n}(t)$ 是 $\tau_n^n+\tau_{n-1}^n+\cdots+\tau_k^n$ 的分布函数(上标 n 表示自状态 n 出发)，而 $\tau_n^{n+1}, \tau_{n-1}^{n+1}, \cdots, \tau_k^{n+1}$ 分别与 $\tau_n^n, \tau_{n-1}^n, \cdots, \tau_k^n$ 有相同的分布，故 $\tau_n^{n+1}+\tau_{n-1}^{n+1}+\cdots+\tau_k^{n+1}$ 也与 $\tau_n^n+\tau_{n-1}^n+\cdots+\tau_k^n$ 同分布，故得

$$\begin{aligned}F_{k,n+1}(t)&=P(\tau_{n+1}^{n+1}+\tau_n^{n+1}+\cdots+\tau_k^{n+1}\leqslant t)\\&\leqslant P(\tau_n^{n+1}+\cdots+\tau_k^{n+1}\leqslant t)\\&=P(\tau_n^n+\cdots+\tau_k^n\leqslant t)=F_{k,n}(t).\end{aligned}$$

故 $F_{k,n}(t)$ 是 n 的单調不增函数，記其极限为 $G_k(t)\ (\geqslant 0)$，得

$$P(t, \infty, k)=G_{k+1}(t)-G_k(t).$$

因此

$$\begin{aligned}P(t, \infty, \infty)&=1-\sum_{k\neq\infty}P(t, \infty, k)\\&=1-\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}(G_{k+1}(t)-G_k(t))=1-\lim_{m\to\infty}G_{m+1}(t).\end{aligned}$$

应区别二种情况:

(i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}q_k^{-1}=\infty$. 因 $F_{k,n}(t)\downarrow G_k(t)\ (\geqslant 0)$，故对 $\lambda>0$ 有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}G_k(t)dt&=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}F_{k,n}(t)dt\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dF_{k,n}(t).\end{aligned}$$

因为分布 $F_{k,n}(t)$ 是 $F_k, F_{k+1}, \cdots, F_n$ 的卷积，故

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda}\prod_{\nu=k}^{n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dF_\nu(t)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda}\prod_{\nu=k}^{n}\left(1+\frac{\lambda}{q_k}\right)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\prod_{\nu=k}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda}{q_k}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

由于 $\sum q_k^{-1}=\infty$，此无穷乘积等于 0. 又因 $G_k(t)$, $F_{k,n}(t)$ 对 t 是单調不减的，故必 $G_k(t)\equiv 0$. 于是

$$P(t, \infty, \infty)=1, \text{ 因之 } P(t, \infty, k)=0, \quad k\neq\infty.$$

此时 ∞ 为套点，而上述的簡单想法可行。

（ii） $\sum_1^{\infty} q_k^{-1}<\infty$. 此时上面的无穷乘积恒为正，当 $k\uparrow\infty$ 时趋于1. 故得

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}G_k(t)\,dt=\frac{1}{\lambda}.$$

由于 $G_k(t)$ 与 $F_{k,n}(t)$ 都对 t 单調不減，故得

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\lim_{k\to\infty} G_k(t)\,dt=\frac{1}{\lambda},$$

由此得

$$\lim_{k\to\infty} G_k(t)\equiv 1.$$

因此

$$P(t, \infty, \infty)=0, \quad \sum_{k\neq\infty} P(t, \infty, k)=1.$$

故 ∞ 是瞬时逗留点。由 ∞ 到有限点的轉移是重要的，此时前述的簡单想法不可行。

上述二种情况都不能从有限点到达无限大，但在 (i) 中，在 ∞ 附近的減少程度逐漸变弱，故自然伸延后，∞ 不能不成为套点。反之，在 (ii) 中，則愈接近 ∞，減少程度逐漸强烈，故即使在 ∞ 也不能不回到有限点。因为有限点为指数型逗留点，故若以 R 的点为横軸，时間为纵軸，繪出自 ∞ 出发的样本过程則得图形如左。



图 48.1

下面考虑純生过程。設 $p_n>0(n\geqslant1)$. 0 当然是套点。自 $n(\geqslant1)$ 出发，个数逐漸增加，若以 τ_{nm} 表从 n 出发增至 $m(>n)$ 所用之时間，則与上同样

$$E(\tau_{nm})=\sum_{n}^{m-1} p_\nu^{-1}<\infty.$$

故从 n 可以实际到达 m. 若令

$$\sum_{1}^{\infty} p_n^{-1} < \infty,$$

则自 1 出发（因之也可自 n 出发）在有限时間 τ 内，可超过任何大的数。因此对适当大的 t,

$$\sum_{m \neq \infty} P(t, n, m) < 1.$$

故若想在 $R = \{1, 2, \cdots, \infty\}$ 上定义 Markoff 过程，則应設

$$P(t, n, \infty) = 1 - \sum_{m \neq \infty} P(t, n, m).$$

因 $P(t, n, m) \equiv 0$, $m < n$, 故必須

$$P(t, \infty, m) = \lim_{n \to \infty} P(t, n, m) = 0.$$

亦即 ∞ 是套点。以 τ_n 表自有限点 n 到达 ∞ 所經之有限时間，則

$$E(\tau_n) = \sum_{n}^{\infty} p_\nu^{-1} < \infty.$$

这 τ_n 是 Markoff 时間，称为**爆发时間**(explosion time)。

若令

$$\sum_{1}^{\infty} p_n^{-1} = \infty,$$

則

$$E\{e^{-\lambda \tau_{nm}}\} = \prod_{\nu=n}^{m-1} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t p_\nu} p_\nu \, dt$$

$$= \prod_{\nu=n}^{m-1} \left(1 + \frac{\lambda}{p_\nu}\right)^{-1} \to 0 \quad (m \to \infty).$$

故令 $\tau_n = \lim_{m} \tau_{nm}$, 則 $E(e^{-\lambda \tau_n}) = 0$, $P(\tau_n = \infty) = 1$. 亦即永远不会爆发，而

$$\sum_{m \neq \infty} P(t, n, m) = 1.$$

与前同理可知 ∞ 是套点。

对一般的生灭过程，由 p_n, q_n 的大小关系可产生种种有趣現象，但从略。

第5章 扩　散

§49 扩 散 点

設 $x^{(a)}(t, \omega)$ 为在 R 内变动的 Markoff 过程，記号及条件都同上章。$x^{(a)}(t, \omega)$ 的样本过程只有第一类不連續点。令 U 为 R 的开子集。从 U 内的任意点 a 出发的 $x^{(a)}(t, \omega)$，在 U 的最初通过时間 $\tau=\tau_U^{(a)}$ 以前（包含 τ 在内），如果以概率 1 为連續的，则此 Markoff 过程称为在 U 内是**扩散的**。由上連續性假定，$x^{(a)}(\tau_U^{(a)})$ 位于 U 的边界 ∂U 上。

若 $x^{(a)}(t)$ 在 U 及 V 内是扩散的，则在 $W=U\cup V$ 上是扩散的。令 $a\in U$. 因为❶

$$\tau_W^{(a)}=\begin{cases}\tau_U^{(a)}, & x(\tau_U^{(a)})\notin V,\\ \tau_U^{(a)}+(\tau_V^{(b)})_{b=x(\tau_U^{(a)})}, & x(\tau_U^{(a)})\in V,\end{cases}$$

故 $x^{(a)}(t)$ 連續于 $0\leqslant t\leqslant \tau_W^{(a)}$. 同理，对 $a\in V$ 也可得出同样的結論。

如果在 b 的某一邻域内 $x^{(a)}(t)$ 是扩散的，則称 $b\in R$ 为**扩散点**。扩散点的集合显然是开集。

若所有的点都是扩散点，則过程是扩散过程。为証此，設 $x^{(a)}(t)$ 的所有的点都是扩散点。令 a 为 R 的任意点，由于 a 是扩散点，因而 $x^{(a)}(t)$ 在 a 的某邻域 U 内是扩散的，故在 $0\leqslant t\leqslant \tau_U^{(a)}$ 中連續。并且由于 $x^{(a)}(\tau_U^{(a)})\in\partial U$，所以 $\tau_U^{(a)}>0$. 另外，再令在 $0\leqslant t\leqslant \tau$ 中使得 $x^{(a)}(t)$ 連續的上确界也記作 τ，显然 $\tau>\tau_U^{(a)}>0$. 只要証明

---

❶ 此式应改为

$$\tau_W^{(a)}=\begin{cases}\tau_U^{(a)}, & x(\tau_U^{(a)})\notin V,\\ \tau_U^{(a)}+(\tau_V^{(b)})_{b=x(\tau_U^{(a)})}, & x(\tau_U^{(a)})\in V,\quad x(\tau_V^{(b)})\notin U,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

——校者注

$\tau=\infty$. 如 $\tau<\infty$，考虑 $b=\lim\limits_{t\uparrow\tau} x^{(a)}(t)$. 在包含 b 的某邻域 V 内 $x^{(a)}(t)$ 是扩散的。由于 $b\in V$，故若适当选取 $\varepsilon(>0)$，则在 $\tau-\varepsilon\leqslant t<\tau$ 内 $x^{(a)}(t)\in V$. 因为 $b'=x^{(a)}(\tau-\varepsilon)\in V$，故自 b' 出发，到 $\tau-\varepsilon+\tau'(\tau'=\tau_V^{(b')})$ 止，$x^{(a)}(t)$ 是連續的，且 $x^{(a)}(\tau-\varepsilon+\tau')\in\partial V$，并因在 $\tau-\varepsilon\leqslant t<\tau$ 内，$x^{(a)}(t)$ 位于 V 中，$\lim\limits_{t\uparrow\tau} x^{(a)}(t)$ 也位于 V 中，所以 $\tau-\varepsilon+\tau'>\tau$，这与 τ 是上确界矛盾。因之 $\tau=\infty$ 而且 $x^{(a)}(t)$ 連續于 $0\leqslant t<\infty$，这說明 $x^{(a)}(t)$ 是扩散过程。反之，对于扩散过程来說，所有的点都是扩散点，可由扩散过程来加以定义。

一般地，算子 S 称为在 x 是**局部的** (local)，就是指在 x 的邻域上，对 $f=g$ 的 $f, g\in\mathfrak{D}(S)$，$Sf(x)=Sg(x)$ 成立。

定理 1　$x^{(a)}(t,\omega)$ 的生成算子 A 在此 Markoff 过程的扩散点是局部的。

証明　令 a 为扩散点。若令 a 的扩散邻域为 U，则包含于 U 内的 a 的邻域都是扩散的。今設 $f_1, f_2\in\mathfrak{D}(A)$；且在 a 的邻域 V 上 $f_1=f_2$. 由 Dynkin 定理可得

$$Af_i(a)=\lim_{W\downarrow a}\frac{Ef_i(x^{(a)}(\tau_W))-f_i(a)}{E(\tau_W)}.$$

若取 W 使 $\overline{W}\subset U\cap V$，则 $x^{(a)}(\tau_W)\in U\cap V$，而且 $Af_1(a)=Af_2(a)$.

§50 Ray 定 理

考虑 R 上的 Markoff 过程 $x^{(a)}(t)$. R 的点 b 称为**一維点**，就是指存在 b 的某一邻域与綫段同胚。这可以看成只与 R 有关的性質，而与 $x^{(a)}(t)$ 无关。一維点全体显然是开集合。若 b 是 R 的一維点，同时又是 $x^{(a)}(t)$ 的扩散点，则称 b 为 $x^{(a)}(t)$ 的**一維扩散点**。这种点的全体也是开集合。

令 b 为扩散点，U 为 b 的邻域。由于 b 是扩散点，所以不难想

象，从 b 出发的 Markoff 过程 $x^{(b)}(t)$ 在充分短的时間内跑出 U 外的概率 $P(t, b, U^c)$ 非常小。断定此概率为 $o(t)$ 就是本节所説明的 Ray 定理。

定理1　若 b 是 $x^{(a)}(t)$ 的一維扩散点，则

$$P(t, b, U^c)=o(t), \quad U \text{ 是 } b \text{ 的邻域。} \tag{50.1}$$

証明　由假定，b 附近的点都是一維扩散点。因为 U 越小则 $P(t, b, U^c)$ 越大，所以只对 $\bar{U}$ 的点都是一維扩散点的情形予以証明。因为 b 有与綫段同胚的邻域，故 b 的某邻域内的点可以由对应的綫段上的点亦即实数来表示。U 也可看成区間 (u_1, u_2).

若(50.1)不成立，则存在 $t_n \downarrow 0$, $c>0$ 使

$$P(t_n, b, U^c)>ct_n. \tag{50.2}$$

现在令 $\tau_1^{(b)}$ 为 $x^{(b)}(t, \omega)$ 初次从 u_1 跑出 U 的时間。若 $x^{(b)}(t, \omega)$ 永远停留于 U 内，或从 u_2 跑出 U，则定义 $\tau_1^{(b)}=\infty$. 精确些説就是：令 U 的最初通过时間为 $\tau_U^{(b)}$，若 $\tau_U^{(b)}<\infty$，则因 U 只由扩散点所构成，故 $x^{(b)}(\tau_U^{(b)})$ 等于 U 的边界点 u_1 或 u_2. 定义

$$\tau_1^{(b)}=\begin{cases}\tau_U^{(b)}, & \text{当 } x^{(b)}(\tau_U^{(b)})=u_1 \text{ 时；}\\ \infty, & \text{其他。}\end{cases}$$

以 u_2 代替 u_1，则可同样定义 $\tau_2^{(b)}$. 由(50.2)有

$$P(\tau_1^{(b)}<t_n)+P(\tau_2^{(b)}<t_n)\geqslant P(x^{(b)}(t_n)\in U^c)>ct_n.$$

所以或者

$$P(\tau_1^{(b)}<t_n)>\frac{c}{2}t_n$$

对无穷多个 n 成立；或者

$$P(\tau_2^{(b)}<t_n)>\frac{c}{2}t_n$$

对无穷多个 n 成立。試証两者之一成立而由它导出矛盾。因为証法相同，所以只証后者。改用記号而将自下式导出矛盾：

$$P(\tau_2^{(b)}<t_n)>ct_n, \quad c>0, \quad t_n\downarrow 0. \tag{50.3}$$

若在 b 与 u_2 間取 y，則

$$P(\tau_2^{(b)}<t_n)\leqslant P(\tau_2^{(b)}-\tau_2^{(b)}(y)<t_n,\ \tau_2^{(b)}(y)<t_n).$$

这里 $\tau_2^{(b)}(y)$ 是以 (u_1, y) 代上面的 U 后定义的 $\tau_2^{(b)}$。

由强 Markoff 性

$$=E\{P(\tau_2^{(b)}-\tau_2^{(b)}(y)<t_n/B_{\tau_2}^{(a)}(y));\ \tau_2^{(b)}(y)<t_n\}$$

$$=E\{P(\tau_2^{(y)}<t_n);\ \tau_2^{(b)}(y)<t_n\}\leqslant P(\tau_2^{(y)}<t_n).$$

($\tau_2^{(y)}$ 与 $\tau_2^{(b)}$ 类似，同样地对 $U=(u_1, u_2)$ 定义，只是以 y 代替 b.)
因而由 (50.3)，对 $b\leqslant y<u_2$ 得

$$P(\tau_2^{(y)}<t_n)>ct_n,\quad c>0,\ t_n\downarrow 0. \tag{50.4}$$

若令 $\varepsilon=(u_2-b)/4\ (>0)$，$a=b+2\varepsilon$ 及

$$y(t, \omega)=\begin{cases}x^{(a)}(t, \omega), & t<\tau_U^{(a)},\\ x^{(a)}(\tau_U^{(a)},\omega), & t\geqslant\tau_U^{(a)},\end{cases}$$

則 $y(t)$ 的样本过程是連續的，且常处于 $[u_1, u_2]$ 内。故若取 s 充分小，則

$$P(a-\varepsilon<y(t)<a+\varepsilon,\ 0\leqslant t\leqslant s)>\frac{1}{2}. \tag{50.5}$$

因为 $y(t)$ 的样本过程一致連續于 $0\leqslant t\leqslant s$，故

$$\alpha_n=P(\text{对某一 }k(kt_n\leqslant s),\ y((k-1)t_n)<a+\varepsilon,\ y(kt_n)=u_2)$$
$$\to 0\quad (n\to\infty). \tag{50.6}$$

然而

$$\alpha_n\geqslant\sum_{k=1}^{[s/t_n]}P(a-\varepsilon<y(t)<a+\varepsilon,\ 0\leqslant t\leqslant(k-1)t_n,\text{而且 }y(t)=u_2).$$

因 $y(t)$ 关于 $\boldsymbol{B}_t$ 可测，故

$$=\sum_{k=1}^{[s/t_n]}E\{P(y(t)=u_2/\boldsymbol{B}_{(k-1)t_n});$$
$$a-\varepsilon<y(t)<a+\varepsilon,\ 0\leqslant t\leqslant(k-1)t_n\}$$

$$=\sum E\{P(\tau_2^{(b)}<t_n)_{b=x^{(a)}((k-1)t_n)};$$
$$a-\varepsilon<y(t)<a+\varepsilon,\ 0\leqslant t\leqslant(k-1)t_n\}.$$

$x^{(a)}((k-1)t_n)$ 在 $\{a-\varepsilon<y(t)<a+\varepsilon,\ 0\leqslant t\leqslant(k-1)t_n\}$ 上等于

$y((k-1)t_n)$，因而处于$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$內。因$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\subset[b, u_2)$，故由(50.4)知 $P(\tau_2^{(b)}<\tau_n)_{b=y^{(a)}((k-1)t_n)}$ 大于 ct_n。

$$\alpha_n \geqslant \sum_k ct_n P(a-\varepsilon<y(t)<a+\varepsilon, 0\leqslant t\leqslant (k-1)t_n)$$

$$\geqslant \frac{1}{2} ct_n[s/t_n] \geqslant \frac{c}{4} s \quad (n\geqslant 2).$$

此与(50.6)矛盾。

定理 2 設 R 的开集 U 与綫段同胚，并設 U 所有的点都是扩散点。若令F为 U 的閉子集，則对 $b\in F$ 一致地有

$$P(t, b, U^c)=o(t). \tag{50.7}$$

証明 如果扩大定理中F而縮小U时，定理能被証明，則此定理自然就成立了。故不妨設 $\overline{U}$ 的各点也都是一維扩散点，而且F与閉綫 J 同胚，令 $J=[b_1, b_2]$. 由上定理

$$P(t, b_i, U^c)=o(t), \quad i=1, 2. \tag{50.8}$$

此处 $o(t)$ 与 i 无关。利用强 Markoff 性，对 $b_1\leqslant b\leqslant b_2$，

$$P(t, b, U^c)=\int_0^t \varphi_1(ds)P(t-s, b_1, U^c)$$

$$+\int_0^t \varphi_2(ds)P(t-s, b_2, U^c)=o(t).$$

这里 φ_i 是 $x^{(b)}(t)$ 从 b_i 跑出(b_1, b_2)的时間的分布。

回顧定理 1 的証明，可見

$$P(\tau_1^{(b)}<t)+P(\tau_2^{(b)}<t)=o(t),$$

故如以 $Q(t, b, U^c)$ 表 $x^{(b)}(s)$ 在时間区間 $0\leqslant s\leqslant t$ 內到过 U^c 的概率，則上式左边为 $Q(t, b, U^c)$，故得

定理 3 上述二定理对 $Q(t, b, U^c)$ 也成立。

§51 局部生成算子

称 Markoff 过程 $x^{(a)}(t)$ 在点 b 上有局部性，如对 b 的任意邻

域 U，有

$$P\{x^{(b)}(t)\in U^c\}=P(t,b,U^c)=o(t). \qquad (51.1)$$

按上节 Ray 定理，$x^{(a)}(t)$ 在其一維扩散点上有局部性。

以下設在 b 有局部性。$f(x)$ 在 $x=b$ 的充分小的邻域 V 上連續而且有界时，若

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\left\{\int_V P(t,b,dy)f(y)-f(b)\right\} \qquad (51.2)$$

存在，則說 $f\in\mathfrak{D}(A_b)$，并以 A_bf 表此极限。因为在 b 上有局部性，故此定义与 V 的选择无关。A_b 有下列性質：

$(A_b.1)$（局部性） 若 $f\in\mathfrak{D}(A_b)$ 且在 b 的附近（即某邻域上）$f=g$，則 $g\in\mathfrak{D}(A_b)$ 且

$$A_bf=A_bg.$$

$(A_b.2)$（綫性） 若 $f,g\in\mathfrak{D}(A_b)$，則 $\alpha f+\beta g\in\mathfrak{D}(A_b)$，且

$$A_b(\alpha f+\beta g)=\alpha A_bf+\beta A_bg.$$

$(A_b.3)$（正定） 若在 b 的邻域上 $f\geqslant f(b)$，$f\in\mathfrak{D}(A_b)$，則 $A_bf\geqslant 0$. 又显然有

$(A_b.4)$ 若 $f\in\mathfrak{D}(A)$，則 $f\in\mathfrak{D}(A_b)$，且 $A_bf=Af(b)$.

有了这些准备，定义局部生成算子 A_U 如下：

定义 1 設开集 U 中各点均有局部性，由

$$\mathfrak{D}(A_U)=\left\{f\Big/\begin{array}{l}\text{对所有的 } b\in U,\ f\in\mathfrak{D}(A_b),\\ A_bf \text{ 对 } b\in U \text{ 連續}\end{array}\right\}$$

$$A_Uf(b)=A_bf,\quad b\in U$$

定义的算子 A_U 称为 $x^{(a)}(t)$ 在 U 上的**局部生成算子**。

前面已經看到，一維扩散点上有局部性，故在其上可以考虑 A_b，且这时可把 A_b 定义为

定义 2

$$P_U(t,a,E)=P\{\omega/x^{(a)}(t)\in E,\ \text{而且 } x^{(a)}(s)\in U,\ 0\leqslant s\leqslant t\}.$$

$$A_b f=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\left\{\int_U P_U(t, b, dy)f(y)-f(b)\right\}.$$

这定义比較有用。

两定义的一致是由于

$$\left|\int_U P(t, b, dy)f(y)-\int_U P_U(t, b, dy)f(y)\right|$$

$$\leqslant\int_U (P(t, b, dy)-P_U(t, b, dy))|f(y)|$$

$$\leqslant\sup_U|f|\cdot P\{\text{对集 } 0\leqslant s\leqslant t,\ x^{(a)}(s)\notin U\}.$$

由 §50 的定理 3，后一概率是 $o(t)$。

§52 一維扩散点的分类

一維扩散点的全体是开集合，而且可以表为至多可数多个連續分量的直接和，并且各分量与实数开区間同胚。今取其中一个 I，若 I 与 (r_1, r_2) 同胚，則 I 的点可由 (r_1, r_2) 中的实数表示。

令 $b\in I$，則 $x^{(b)}(t)$ 連續于 $0\leqslant t<\tau_I^{(b)}$ 的概率为 1. 若

$$P(\text{对 } 0\leqslant t<\tau_I^{(b)} \text{ 中的 } t,\ x^{(b)}(t)\geqslant b)=1, \tag{52.1}$$

則称 b 为**右通过点** (right translation point)。

令 U 为含于 I 内的 b 的邻域。因恒有 $\tau_U^{(b)}\leqslant\tau_I^{(b)}$，故若 b 是右通过点，則

$$P(\text{对 } 0\leqslant t<\tau_U^{(b)} \text{ 中的 } t,\ x^{(b)}(t)\geqslant b)=1. \tag{52.2}$$

反之，由此条件可知 b 是右通过点。为了証明这一点，令 τ 为 $x^{(b)}(t)$ 自 b 跑出 $[b, r_2]$ 的最初时間。如此情况不发生，則令 $\tau=\infty$，τ 是 Markoff 时間。令 $\tau_n=\min(\tau, n)$，則 τ_n 是有限 Markoff 时間。需要証明的是 $P(\tau<\infty)=0$. 因为

$$P(\tau<\infty)=\lim_{n\to\infty}P(\tau<n)=\lim_{n\to\infty}P(\tau_n<n),$$

故只要証明 $P(\tau_n<n)=0$ 卽可。由 τ 的定义，

$$0=P(\tau<n,\ \text{且对充分小的}\ t,\ x^{(b)}(\tau_n+t)\geqslant b)\ ❶$$

$$=P(\tau_n<n,\ \text{且对充分小的}\ t,\ x^{(b)}(\tau_n+t)\geqslant b)\ ❶$$

$$=E\{P\{\text{对充分小的}\ t,\ x^{(b)}(\tau_n+t)\geqslant b/\boldsymbol{B}_{\tau_n}\};\ \tau_n<n\}\ ❶$$

$$=E\{P\{\text{对充分小的}\ t,\ x^{(b)}(t)\geqslant b\};\ \tau_n<n\}$$

$$\geqslant E\{P\ \{\text{对}\ 0\leqslant t<\tau_U^{(b)},\ x^{(b)}(t)\geqslant b\};\tau_n<n\}$$

$$=p\{\tau_n<n\}\quad(\text{由假定}(52.2))。$$

在 (52.1) 中，以 $x^{(b)}(t)\leqslant b$ 代替 $x^{(b)}(t)\geqslant b$，即得**左通过点** (left translation point) 的定义。与 (52.2) 同样，在此定义中 I 也可由 b 的任意邻域 $U(\subset I)$ 来代替。

既是左通过点又是右通过点的点，实际上就是套点。是右通过点但不是套点的点，称为**純右通过点**。同样定义**純左通过点**。I 中既非左通过点又非右通过点的点叫做**正則点** (regular point)。

左通过点，右通过点，純左通过点，純右通过点，正則点与套点各自的全体分别記为 $\varLambda_l$, $\varLambda_r$, $\varLambda_{pl}$, $\varLambda_{pr}$, $\varLambda_2$ 与 $\varLambda_t$.

虽然 I 与实数开区間同胚，但 I 与此区間的同胚对应却有好几种，今按方向把它分为两种。取 I 内任两点，按其所对应的实数大小关系而分为两种。这样的分类与两点的选擇无关。关于同向的两个表示，左、右通过点的定义是一致的，但关于逆向的表示，則需要左右互换。套点，正則点的定义則对任何表示都一样。

(i) 若令 b 为右通过点，則 $x^{(a)}(t)$ 从右向左切 b 的概率为 0.

証明　若令 τ 为从右向左最初切 b 的时間，則 τ 是 Markoff 时間(若不发生这种情况，則令 $\tau=\infty$)。用自 (52.2) 导出 (52.1) 同样的方法，可証明 $P(\tau<\infty)=0$.

(ii) 对 $b<a<r_2$ 内所有的 a，若

$$P\{\text{对}\ 0\leqslant t<\tau_I^{(a)}\ \text{中的}\ t,\ x^{(a)}(t)\geqslant b\}=1,\qquad(52.3)$$

則 b 是右通过点。

❶ 三行中的 $x^{(b)}$，原书均誤为 $x^{(a)}$，——校者注

由假定，如果已給 t，則对 $b<a<r_2$，

$$P\{\tau_l^{(a)}\leqslant t,\ \text{或}\ b\leqslant x^{(a)}(t)<r_2\}=1. \tag{52.4}$$

于 b 与 r_2 間取 u_2，r_1 与 b 間取 v_1，b 与 u_2 間取 v_2，由 Ray 定理，存在随 t 而收斂于 0 的 $\delta(t)$ 使

$$P\{\text{对}\ 0\leqslant s<t,\ x^{(a)}(s)\in(r_1,\ u_2)\}>1-\delta(t)\cdot t.$$

这里可对 $v_1\leqslant a\leqslant v_2$ 中的 a 共同取 $\delta(t)$. 特别对 $b<a\leqslant v_2$ 中的 a，由假定(52.3)得

$$P\{\text{对}\ 0\leqslant s<t,\ x^{(a)}(s)\in[b,\ u_2)\}>1-\delta(t)\cdot t.$$

因此当然

$$P\{x^{(a)}(t)\in[b,\ u_2)\}>1-\delta(t)\cdot t,$$

即
$$P(t,\ a,\ [b,\ u_2))>1-\delta(t)\cdot t.$$

当 $a\downarrow b$ 时，因 $P(t,\ a,\ \cdot)\to P(t,\ b,\ \cdot)$（泛弱收斂），故

$$P(t,\ b,\ [b,\ r_2))\geqslant 1-\delta(t)\cdot t,$$

即
$$P\{x^{(b)}(t)\in[b,\ r_2)\}\geqslant 1-\delta(t)\cdot t.$$

故当然

$$P\{\tau_l^{(b)}\leqslant t,\ \text{或}\ b\leqslant x^{(b)}(t)<r_2\}\geqslant 1-\delta(t)\cdot t. \tag{52.5}$$

又由(52.4)，对 $b<a<r_2$ 中的 a 有

$$P\{\tau_l^{(a)}\leqslant t,\ \text{或}\ b\leqslant x^{(a)}(t)<r_2\}\geqslant 1-\delta(t)\cdot t. \tag{52.6}$$

若对任意給定的 t，能証明

$$P\{\text{对}\ 0\leqslant s<\min(\tau_l^{(b)},\ t)\ \text{中的}\ s,\ x^{(b)}(s)\in[b,\ r_2)\}=1, \tag{52.7}$$

則令 $t\uparrow\infty$ 即知 b 是右通过点。为此，若考慮到 $x^{(b)}(s)$ 在 $0\leqslant s<\tau_l^{(b)}$ 中連續，則只要証明

$$P\left\{\text{对}\ \frac{k}{n}t<\tau_l^{(b)}\ \text{中之}\ k\ (0\leqslant k\leqslant n),\ x^{(b)}\left(\frac{k}{n}t\right)\in[b,\ r_2)\right\}$$
$$\to 1\quad(n\to\infty)$$

即可。利用 Markoff 性及(52.5)(52.6)，得

$$\text{上述概率}\geqslant\left(1-\delta\left(\frac{t}{n}\right)\cdot\frac{t}{n}\right)^n>1-\delta\left(\frac{t}{n}\right)\cdot t\to 1,$$

(iii) Λ_r 是閉集合。

証明 設 $b_n\in\Lambda_r$, $b_n\to b$, 只需証 $b\in\Lambda_r$. 不失普遍性, 可設 $b_n\uparrow b$ 或 $b_n\downarrow b$.

$b_n\uparrow b$ 时, 由 $b_n\in\Lambda_r$ 及(i)得

$$P\{对\ 0\leqslant t<\tau_I^{(b)}\ 中的\ t,\ x^{(b)}(t)\in[b_n,\ r_2)\}=1.$$

令 $n\to\infty$ 得

$$P\{对\ 0\leqslant t<\tau_I^{(b)}\ 中的\ t,\ x^{(b)}(t)\in[b,\ r_2)\}=1,$$

此表明

$$b\in\Lambda_r.$$

$b_n\downarrow b$ 时, 由 $b_n\in\Lambda_r$ 及 (i), 对 $a>b_n$ 的 a,

$$P\{对\ 0\leqslant t<\tau_I^{(a)}\ 中的\ t,\ x^{(b)}(t)\in[b_n,\ r_2)\}=1.$$

故当然

$$P\{对\ 0\leqslant t<\tau_I^{(a)}\ 中的\ t,\ x^{(b)}(t)\in[a,\ r_2)\}=1.$$

因为 $b_n\downarrow b$, 故上式对任意的 $a>b$ 成立。由(ii)得 $b\in\Lambda_r$.

(iv) Λ_l 也是閉集, 因此 Λ_t 也是閉集, 但 Λ_2 是开集。

§53 Feller 的标准尺度

由上节, 一維扩散点集是开集, 而且它的各个分量与实数区間同胚, 因此, 分量内的点可由区間 $(r_1,\ r_2)$ 内的点来表示。若只考虑其中正则点, 则又得 $(r_1,\ r_2)$ 中的开子集, 因而也是至多可数多个区間的直接和。取其中一个区間或其中子区間, 表以 $I=(i_1,\ i_2)$. $(i_1,\ i_2)$ 内的点都是正则点, 称它为**正则区間** (regular interval)。

取 I 的子区間 $J=(j_1,\ j_2)$ 使 $\bar{J}\subset I$. 連端点在内, J 仅含正则点。取 $a\in\bar{J}$, $x^{(a)}(t)$ 自 a 出发, 在到达 j_1 之前先到 j_2 的概率記为 $s(a;\ j_2,\ j_1)$, 在到达 j_2 之前先到达 j_1 的概率記为 $s(a;\ j_1,\ j_2)$, 则

$$1-s(a;\ j_2,\ j_1)-s(a;\ j_1,\ j_2)$$

是永停留于 J 内的概率。下面的定理断定, 此概率为0,

定理 1

(A) a 从 j_1 上升到 j_2 时，$s(a; j_2, j_1)$ 从 0 連續地上升（狹义）到 1.

(B) $s(a; j_2, j_1)+s(a; j_1, j_2)=1$.

証明 分为五步。

(i) $j_1\leqslant a<b\leqslant j_2$ 时

$$s(a; j_2, j_1)=s(a; b, j_1)s(b; j_2, j_1). \tag{53.1}$$

$s(a;j_2,j_1)$ 是从 a 出发，在到达 j_1 前先到达 j_2 的概率，而这种情况的发生应是：从 a 出发，在到达 j_1 前先到达 b，其次从 b 出发，在到达 j_1 前先到达 j_2. 考虑 $x^{(a)}(t)$ 在到达 j_1 前先到 b 的时間 τ（若不发生这种情形，則令 $\tau=\infty$），因为这是 Markoff 时間，故利用强 Markoff 性，就得(53.1)。

(ii) 若 $j_1<a<j_2$，则

$$0<s(a; j_2, j_1)<1. \tag{53.2}$$

为証此，先設有使 $s(a; j_2, j_1)=0$，$j_1<a<j_2$ 这样的 a 存在，将由此导致矛盾。令在 $a<b<j_2$ 中且使 $s(a; b, j_1)=0$ 的 b 的全体为 B. 显然 $j_2\in B$. 令 B 的下确界为 b_0，取 $j_1<a'<b_0$, $b\in B$. 若 $a'\leqslant a$，則由 (i)，

$$s(a'; b, j_1)=s(a'; a, j_1)s(a; b, j_1)=0.$$

若 $a<a'<b_0$，則

$$0=s(a; b, j_1)=s(a; a', j_1)s(a'; b, j_1).$$

但由 $a'<b_0$ 有 $s(a; a', j_1)>0$，故 $s(a'; b, j_1)=0$. 因此，无論如何，总有 $s(a'; b, j_1)=0$. 这説明

$$P\{\text{对 } 0\leqslant t<\tau_J^{(a')},\ x^{(a')}(t)\leqslant b\}=1.$$

在 B 中取 b 使之逼近 b_0 而得

$$P\{\text{对 } 0\leqslant t<\tau_J^{(a')},\ x^{(a')}(t)\leqslant b_0\}=1 \quad (j_1<a'<b_0).$$

由上节(ii)，b_0 是左通过点（上节中虽只就右通过点作了叙述，但对

左也一样)。因为 J 的点都是正則点,故产生矛盾。因此 $s(a;j_2,j_1)>0$. 同理 $s(a;j_1,j_2)>0$. 故

$$s(a;j_2,j_1)\leqslant 1-s(a;j_1,j_2)<1.$$

(iii) 由(i)与(ii)得

$$j_1\leqslant a<b\leqslant j_2\text{时},\ s(a;j_2,j_1)<s(b;j_2,j_1).$$

这样,完成了(A)中除連續性外的証明。

(iv) 下証(B). $\alpha=1-s(a;j_2,j_1)-s(a;j_1,j_2)$ 是 $x^{(a)}(t)$ 永停留于 J 内的概率,要証 $\alpha=0$. 令 U 为开集合,若对 $a\in U$, $x^{(a)}(t)$ 永停留于 U 内的概率为 0, 則称 U 为发散的。若 $U\supset V$ 而且 U 是发散的,則 V 也是发散的。因为 $a\in J$ 不是套点,故由 §44(xi),对 a 的充分小的邻域 U 有 $E(\tau_U^{(a)})<\infty$, 故 $P(\tau_U^{(a)}<\infty)=1$, 因此 U 是发散的。次証:如 I 的两个开区間 $U_1=(u_1,v_1)$ 及 $U_2=(u_2,v_2)$, $(u_1<u_2<v_1<v_2)$,都是发散的,則其和 $U=(u_1,v_2)$ 也是发散的。若令 $a\in(u_1,v_1)$, 則 $x^{(a)}(t)$ 的迹綫中,

$$a\to u_1,\quad a\to v_1\to v_2,\quad a\to v_1\to u_2\to u_1,$$
$$a\to v_1\to u_2\to v_1\to v_2,\quad\cdots$$

是跑出 U 外的情形,而永停留于 U 的情形只是

$$a\to v_1\to u_2\to v_1\to u_2\to v_1\to u_2\to\cdots$$

(因为 U_1, U_2 是发散的,故无其他情形)。永停留于 U 内的概率为

$$s(a;v_1,u_1)\cdot s(v_1;u_2,v_2)\cdot s(u_2;v_1,u_1)\cdot s(v_1;u_2,v_2)$$
$$\cdot s(u_2;v_1,u_1)\cdots,$$

因 $s(v_1;u_2,v_2)<1$, 故此无限积为 0.

如 $a\in(v_1,v_2)$, 也同样得証。

若以有限个发散的区間复盖 $\bar{J}$ (Borel-Lebesgue 复盖定理 1),再利用上述結果,則 $\bar{J}$ 被一个发散的开区間复盖。故 J 也是发散的。这説明 $\alpha=0$.

(v) 最后証明(A)中剩下的連續性。先証

$$\lim_{b \uparrow j_2} s(a; b, j_1) = s(a; j_2, j_1). \tag{53.3}$$

由上 (iv) 所証，$\tau_J^{(a)}$ 有限的概率为 1. 若 $x(\tau_J^{(a)}) = j_1$，則 $x^{(a)}(t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant \tau_J^{(a)}$ 中取最大值，且此值小于 j_2. 故若取充分接近于 j_2 的 b，則 $x^{(a)}(t)$ 在到达 b 之前先到达 j_1，因此，取 $b_n \uparrow j_2$，如对任一个 b_n，$x^{(a)}(t)$ 在到达 j_1 前先到达 b_n，則实际上是在到达 j_1 前先到达 j_2，故

$$\lim_{n \to \infty} s(a; b_n, j_1) = s(a; j_2, j_1).$$

又因 $s(a; b, j_1)$ 随 b 增大而減少（因 $b < b'$ 时，$s(a; b', j_1) = s(a; b, j_1) s(b; b', j_1)$），故得証(53.3). 由(i)及(53.3)得

$$s(b; j_2, j_1) = \frac{s(a; j_2, j_1)}{s(a; b, j_1)} \to 1 \quad (b \uparrow j_2).$$

故 $s(b; j_2, j_1)$ 連續于 $b = j_2$. 同理 $s(b; j_1, j_2)$ 也連續于 $b = j_1$，因而 $s(b; j_2, j_1)$ 連續于 $b = j_1$. 由此得

$a \uparrow b$ 时，$s(a; j_2, j_1) = s(a; b, j_1) \cdot s(b; j_2, j_1) \to s(b; j_2, j_1)$.

因此 $a \downarrow b$ 时，$s(a; j_1, j_2) \to s(b; j_1, j_2)$，故

$a \downarrow b$ 时，

$s(a; j_2, j_1) = 1 - s(a; j_1, j_2) \to 1 - s(b; j_1, j_2) = s(b; j_2, j_1)$.

故 $s(a; j_1, j_2)$ 关于 a 連續。

定理 2 若 $(j_1, j_2) \subset (k_1, k_2)$，則对 $a \in [j_1, j_2]$，

$$s(a; k_2, k_1) = s(a; j_1, j_2) \cdot s(j_1; k_2, k_1) + s(a; j_2, j_1) \cdot s(j_2; k_2, k_1).$$

証明 对 Markoff 时間 $\tau_{(j_1, j_2)}^{(a)}$ 应用强 Markoff 性卽可。

在此定理中，令 $s(a; j_1, j_2) = 1 - s(a; j_2, j_1)$，得

$$s(a; k_2, k_1) = \alpha s(a; j_2, j_1) + \beta,$$

这里 α, β 是与二区間 (j_1, j_2)，(k_1, k_2) 有关的常数。利用此結果，可得下述基本定理。

定理 3 在 $I=(i_1, i_2)$ 内，除綫性关系外，存在唯一的連續、狭义增加函数 $s(a)$，使对任意的 $J=(j_1, j_2)$，$\bar{J}\subset I$，有

$$s(a; j_2, j_1)=\frac{s(a)-s(j_1)}{s(j_2)-s(j_1)}.$$

証明 先定义一个 $s(a)$，固定 $J^0=(j_1^0, j_2^0)$，$\bar{J}^0\subset I$，取包含 a 的任意的 $J=(j_1, j_2)$，$I\supset\bar{J}\supset\bar{J}^0$，并令

$$s(a)=\alpha s(a; j_2, j_1)+\beta.$$

其中 α, β 由

$$s(j_2^0)=1, \quad s(j_1^0)=0$$

决定。今取更大的 $J'=(j_1', j_2')$ 代替 J. 同样定出 $s(a)$，并記为 $s'(a)$. 由上定理，对 $b\in(j_1, j_2)$，$s(b; j_2', j_1')$ 与 $s(b; j_2, j_1)$ 是綫性关系，故 $s'(b)$ 与 $s(b)$ 也是綫性关系。又因 $s'(j_2^0)=s(j_2^0)=1$，$s'(j_1^0)=s(j_1^0)=0$，故 $s'(b)\equiv s(b)$ $(b\in(j_1, j_2))$. 特别令 $b=a$ 而得 $s'(a)=s(a)$. 这説明 $s(a)$ 的决定与 J 的选择无关。又由 $s(a)$ 的定义方法看出，$s(a; j_2, j_1)$ 是 $s(a)$ 的綫性式，且由 $s(j_2; j_2, j_1)=1$，$s(j_1; j_2, j_1)=0$ 得証定理中所需的关系。

反之，如满足定理要求的 $s(a)$ 有两个为 $s_1(a)$，$s_2(a)$，则在任意的 $J(\bar{J}\subset I)$ 内，它們有綫性关系。因为綫性关系的系数只由在两个 a 上的値所决定，故此系数与 J 的选擇无关。

此定理中的 $s(a)$ 称为 I 内的标准尺度(canonical scale)。这有(內在的)概率意义，且与 I 的坐标的选擇(与实数区間的拓扑对应的方法)无关。标准尺度与下节中叙述的标准測度都是 W. Feller 引进的。

例 令 $x^{(a)}(t)$ 是 $R=R^1\cup\{\infty\}$ 上的 Wiener 过程。若令 $I=R^1$，则 I 的点都是正则点。試証 $s(x)=\alpha x+\beta$. 由 Wiener 过程的左，右对称性得

$$s\left(\frac{j_1+j_2}{2}; j_2, j_1\right)=\frac{1}{2}.$$

因此

$$s\left(\frac{j_1+j_2}{2}\right)=\frac{1}{2}(s(j_1)+s(j_2)).$$

因为 $s(x)$ 是連續的，故可知 $s(x)\equiv\alpha x+\beta$。

§54 Feller 的标准测度

先説明定义标准測度的大概程序。与上节一样，令 I 为正則区間。取区間 J 使 $\bar{J}\subset I$，且令

$$p_J(a)=E(\tau_J^{(a)}),\quad q_J(a)=-p_J(a).$$

可証 $q_J(a)$ 关于 $s(a)$ 是凸的，

$$m_J(a)=\frac{dq_J(a)}{ds(a)}$$

是 a 的增加函数。$m_J(a)$ 不一定連續。若令 $J\subset J'$，則对 $a\in J$，可得

$$m_J(a)=m_{J'}(a)+\text{常数},$$

故若在 I 内任取一定点 a_0，按 $m_J(a_0)=0$ 而規范化，則得

$$m_J(a)=m_{J'}(a),$$

因之，把它定义为 $m(a)$ 就得 I 上的增加函数。測度 dm 就是 Feller 的**标准測度**(canonical measure)。s 一經决定，則 m 除附加常数外可以确定，若令 s 为 $s'=\alpha s+\beta$，則 $m=\alpha^{-1}m+\beta'$。需要証明的是下面的三定理。

定理 1 $p_J(a)<\infty$。

証明 与上节証明 J 发散一样，考虑 $u_1<u_2<v_1<v_2$，对 $J_1=(u_1, v_1)$，$J_2=(u_2, v_2)$，假定 $p_{J_1}(a)$，$p_{J_2}(a)<\infty$，然后对 $J=(u_1, v_2)$ 导出 $p_J(a)<\infty$ 即可。因为已知 $x^{(a)}(t)$ 跑出 J 的概率为 1，故可就迹綫計算 $p_J(a)=E(\tau_J^{(a)})$。利用强 Markoff 性，当 $a\in J_1$ 时，

$$\begin{aligned}p_J(a)=&p_{J_1}(a)+s(a;\,v_1,\,u_1)p_{J_2}(v_1)\\&+s(a;\,v_1,\,u_1)s(v_1;\,u_2,\,v_2)p_{J_1}(u_2)\\&+s(a;\,v_1,\,u_1)s(v_1;\,u_2,\,v_2)\,s(u_2;\,v_1,\,u_1)\,p_{J_2}(v_1)+\cdots,\end{aligned}$$

由于 $s(v_1; u_2, v_2)<1$，此級数收斂。

定理 2　$q_J(a)$ 关于 $s(a)$ 是凸的，因而当然是連續的。

証明　利用强 Markoff 性，当 $j_1<a_1<a<a_2<j_2$ 时，

$$p_J(a)=p_{(a_1,a_2)}(a)+s(a; a_1, a_2)p_J(a_1)+s(a; a_2, a_1)p_J(a_2),$$

(这在 Dynkin 定理中已以更一般的情形証明)。以 $s(a)$ 表示 $s(a; a_1, a_2)$，$s(a; a_2, a_1)$ 得

$$p_J(a)=p_{(a_1,a_2)}(a)+\frac{s(a_2)-s(a)}{s(a_2)-s(a_1)}p_J(a_1)+\frac{s(a)-s(a_1)}{s(a_2)-s(a_1)}p_J(a_2)$$

$$\geqslant\frac{s(a_2)-s(a)}{s(a_2)-s(a_1)}p_J(a_1)+\frac{s(a)-s(a_1)}{s(a_2)-s(a_1)}p_J(a_2).$$

因此 $p_J(a)$ 是凹的，而 $q_J(a)=-p_J(a)$ 是凸的。

由此定理可以决定 $m_J(a)=dq_J(a)/ds(a)$，而且它是增加函数。

定理 3　若 $J\subset J'$，則 $m_J(a)\equiv m_{J'}(a)+$常数，$(a\in J)$.

証明　与上定理的証明一样，对 $a\in J$，

$$p_{J'}(a)=p_J(a)+\frac{s(j_2)-s(a)}{s(j_2)-s(j_1)}p_J(j_1)+\frac{s(a)-s(j_1')}{s(j_2)-s(j_1)}p_J(j_2).$$

若关于 s 微分，則第二、三項为常数。故

$$m_{J'}(a)=m_J(a)+\text{常数}。$$

§ 55　Feller 的标准形式

令 I 为 $x^{(a)}(t)$ 的正則区間，$s(x)$ 和 $dm(x)$ 分別为标准尺度和标准測度。更令 A_I 为 $x^{(a)}(t)$ 在 I 上的局部生成算子。証明 **Feller 的标准形式：**

$$A_I=(D_mD_s^+)_I \tag{55.1}$$

就是本节的目的。

先說明 $D_mD_s^+$ 的定义。固定 x，象普通的微分定义一样，定义

$$D_s^+f(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{s(x+\varepsilon)-s(x)},$$

$$D_m D_s^+ f(x) = \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \downarrow 0} \frac{D_s^+ f(x+\varepsilon) - D_s^+ f(x-\varepsilon')}{m(x+\varepsilon) - m(x-\varepsilon')}.$$

要下此定义，只需在 x 的邻域定义 f 即可。令 f 为定义于开区間 I 的函数，如对所有的 $x \in I$，可确定上面的 $D_m D_s^+ f(x)$，且对 x 連續，則定义

$$f \in \mathfrak{D}((D_m D_s^+)_I), \quad (D_m D_s^+)_I f(x) = D_m D_s^+ f(x). \tag{55.2}$$

因此，f 当然必須是連續的。(55.1) 肯定，两边的算子的定义域与值域是一致的。

引理 1 $s \in \mathfrak{D}(A_I)$，且 $A_I s(x) = 0$.

証明 因 0 可以看作連續函数，故只要对任意 b 証明 $A_b s = 0$ 即可。采用 §51 定义 2 定义 A_b. 令 b 的邻域 $J = (j_1, j_2)$ 为使 $\bar{J} \subset I$ 的区間。若令 $s_J(x) = s(x; j_2, j_1)$，則可以写成 $s(x) = \alpha s_J(x) + \beta$，故只要証明 $A_b s_J = 0$. 由 Markoff 性，

$$\begin{aligned} s_J(b) &= \int_J P_J(t, b, dy) s_J(y) + P(\tau_J^{(b)} \leqslant t, x^{(b)}(\tau_J^{(b)}) = j_2) \\ &= \int_J P_J(t, b, dy) s_J(y) + o(t). \end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{t} \left\{ \int_J P_J(t, b, dy) s_J(y) - s_J(b) \right\} = o(1),$$

即

$$A_b s_J = 0.$$

引理 2 令 $q(x) = \int_{x_0}^{x} m(y) ds(y)$ (x_0 是 I 内任一定点，x 則为 I 内的动点)，則 $q \in \mathfrak{D}(A_I)$ 且 $A_I q(x) = 1$.

証明 与引理 1 一样，对 $b \in I$ 証明 $A_b q = 1$ 即可。考慮 b 的邻域 J，$\bar{J} \subset I$，則对 $x \in J$，

$$\frac{dq_J(x)}{ds(x)} = m(x) + \text{常数},$$

故 $g(x)=q_J(x)+\alpha s(x)+\beta$。由前引理，$A_b s=0$，故如能証 $A_b q_J=1$ 即 $A_b p_J=-1$，則本引理得証。利用 Markoff 性，

$$p_J(b)=\int_J P_J(t,b,dy)(p_J(y)+t)+E(\tau_J^{(b)};\tau_J^{(b)}<t)$$

$$=\int_J P_J(t,b,dy)p_J(y)+P_J(t,b,J)\cdot t+t\cdot o(t)$$

$$=\int_J P_J(t,b,dy)p_J(y)+(1-o(t))\cdot t+t\cdot o(t).$$

$$\frac{1}{t}\left\{\int_J P_J(t,b,dy)p_J(y)-p_J(b)\right\}=-1+o(t)\to -1.$$

引理 3 若 $f\in\mathfrak{D}(A_I)$，且 $A_I f(b)>0$，則在 b 的某邻域內，$f(x)$ 关于 $s(x)$ 是凸的。

証明 因为 $A_I f$ 連續而且 $A_I f(b)>0$，故在 b 的某邻域 J 上 $A_I f(x)>0$。在 J 内任取二点 a_1, a_2，又定出 α, β 使

$$f(a_i)=\alpha s(a_i)+\beta, \quad i=1,2,$$

則只要証明，对 $a_1\leqslant x\leqslant a_2$，

$$f(x)\geqslant \alpha s(x)+\beta$$

即可。因为 $g(x)\equiv f(x)-\alpha s(x)-\beta$ 是連續函数，故在 $a_1\leqslant x\leqslant a_2$ 上取最大值，設为 $g(a_0)$。当 $a_0=a_1$ 或 a_2 时，上式（化为等式）成立。若 $a_0\in(a_1, a_2)$，則因 $g(x)$ 在 a_0 取极大值，故 $A_I g(a_0)\leqslant 0$，从而

$$A_I f(a_0)\leqslant \alpha A_I s(a_0)+\beta A_I\cdot 1=0.$$

此与 $A_I f(x)>0\,(x\in J)$ 矛盾。

定理 1 若 $f\in\mathfrak{D}(A_I)$，則 $f\in\mathfrak{D}((D_m D_s^+)_I)$，且在 I 内，

$$A_I f=(D_m D_s^+)_I f, \quad \text{即} \quad A_x f=D_m D_s^+ f(x),\ x\in I.$$

証明 令 $f\in\mathfrak{D}(A_I)$，$\alpha=A_I f(b)$，并令

$$g(x)=f(x)-(\alpha-\delta)q(x),$$

則

$$A_I g(b)=\alpha-(\alpha-\delta)\cdot 1=\delta>0,$$

故在 b 的某邻域 J 上 g 关于 s 是凸的，因而 $D_s^+ g(x)$ 在 J 内是增

加函数。故若在 b 的两边取 J 的点 b_1, $b_2(b_2>b>b_1)$，则

$$D_s^+g(b_2)>D_s^+g(b_1),$$

因此

$$D_s^+f(b_2)-D_s^+f(b_1)>(\alpha-\delta)(m(b_2)-m(b_1)).$$

故得

$$\frac{D_s^+f(b_2)-D_s^+f(b_1)}{m(b_2)-m(b_1)}>\alpha-\delta.$$

由此得

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0}\frac{D_s^+f(b+\varepsilon)-D_s^+f(b-\varepsilon')}{m(b+\varepsilon)-m(b-\varepsilon')}\geqslant\alpha.$$

同样取 $\alpha+\delta$ 代替 $\alpha-\delta$ 就可証 $\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0}\leqslant\alpha$. 因此

$$D_mD_s^+f(b)=A_If(b).$$

因为右边关于 b 連續，故得 $(D_mD_s^+)_If(b)=A_If(b)$.

上定理之逆为

定理 2 若 $f\in\mathfrak{D}((D_mD_s^+)_I)$，则 $f\in\mathfrak{D}(A_I)$，且在 I 内，

$$(D_mD_s^+)_If=A_If.$$

証明 首先定义 L_b 如下：

$$b\in I\to L_bf=D_mD_s^+f(b),\quad b\notin I\to L_bf=A_bf.$$

其次定义 L 为

$\mathfrak{D}(L)=\{f/$对所有 b, $f\in\mathfrak{D}(L_b)$, 而且 L_bf 对 $b\in R$ 連續$\}$,

$Lf(b)=L_bf$.

若 $f\in\mathfrak{D}(A)$，则 $f\in\mathfrak{D}(A_I)$，故由上定理，$f\in\mathfrak{D}((D_mD_s^+)_I)$，若 $b\in I$，则 $f\in\mathfrak{D}(L_b)$，而且

$$L_bf=D_mD_s^+f(b)=A_bf=Af(b).$$

若 $b\notin I$，则由 $f\in\mathfrak{D}(A)$ 得 $f\in\mathfrak{D}(A_b)$，故 $f\in\mathfrak{D}(L_b)$，而且 $L_bf=A_bf=Af(b)$. 因为 $Af(b)$ 关于 b 連續，故 $f\in\mathfrak{D}(L)$，而且 $Lf=Af$. 故 $L>A$.

其次証 $(\lambda-L)^{-1}(\lambda>0)$ 的存在。为此，只要从 $\lambda u=Lu$ 得出 $u=0$ 即可。令 u 的最小值为 $u(a)$，試証 $u(a)\geqslant 0$. 若 $a\in I$，則在 a 的邻域上 $Lu(x)=D_mD_s^+u(x)$. 若 $u(a)<0$，則 $Lu(a)<0$，故在 a 的邻域上 $D_mD_s^+u(x)<0$，故 $D_s^+u(x)$ 下降，$-u(x)$ 关于 $s(x)$ 为凸。因此 $-u(x)$ 不能于 a 取最大値，即 $u(x)$ 不能于 a 取最小値，这与假定矛盾，即有 $u(a)\geqslant 0$. 若 $a\notin I$，則 $Lu(a)=A_au$ 而且 $u(a)$ 最小，故由 A_a 的定义得 $A_au\geqslant 0$，因此 $u(a)=\lambda^{-1}Lu(a)\geqslant 0$. 于是无論如何 $u(a)\geqslant 0$，即 $u\geqslant 0$. 又如以 $-u$ 代 u 就得 $u\leqslant 0$，故 $u=0$.

由 $L>A$ 得 $(\lambda-L)^{-1}>(\lambda-A)^{-1}=R_\lambda$. 因为 R_λ 的定义域的全体是 R，故 $(\lambda-L)^{-1}=(\lambda-A)^{-1}$. 故 $L=A$.

令 $f\in\mathfrak{D}((D_mD_s^+)_I)$，$b$ 为 I 的任意点，若能确定 A_bf 并且説明它关于 b 連續，則定理証完。能在 I 的任意子区間 $K=(k_1, k_2)$ $(\overline{K}\subset I)$ 内証明 A_bf 連續即可。又可以令 K 的端点是 m 的連續点。取滿足 $\overline{K}\subset J\subset\overline{J}\subset I$ 的区間 $J=(j_1, j_2)$ 并令其端点也是 m 的連續点。試造这样的 g 在 K 上与 f 相等，在 J 外則为 0，而且使 $D_mD_s^+g(b)$ 关于 $b\in I$ 連續。如能这样造，則 g 属于 L 即 A 的定义域，因而 $A_bg=Ag(b)$ 連續于 $b\in J$. 因在 K 上 $f=g$，故利用局部性得 $A_bf=A_bg$，于是 A_bf，$b\in K$ 也連續。剩下来的就是 g 的构造。也可以造 $h=Lg$ 来代替 g. 因在 K 上 $h=D_mD_s^+f$，在 J 外 $h=0$，故只要在 $[j_1, k_1]$，$[k_2, j_2]$ 上定义它。今説明在前一区間上如何造法，由于“D_s^+h 在 m 的連續点上的連續性”和“$D_mD_s^+h$ 的連續性”，h 应滿足的充要条件是:

$$l_1(h)\equiv h(j_1)=0,$$

$$l_2(h)\equiv h(k_1)=D_mD_s^+f(k_1),$$

$$l_3(h)\equiv\int_{j_1}^{k_1}h(x)\,dm(x)=D_s^+f(k_1),$$

$$l_4(h)\equiv\int_{j_1}^{k_1}\int_{j_1}^{y}h(x)\,dm(x)\,ds(y)$$

$$=\int_{j_1}^{k_1} h(x)(s(k_1)-s(x))dm(x)=f(k_1).$$

因为 $C[j_1, k_1]$ 上的泛函 l_1, l_2, l_3, l_4 显然綫性无关，故这样的 h 的确存在。在 $[k_2, j_2]$ 上也是如此。于是定理 2 完全得証。

§ 56 一般通过点上的局部生成算子

R 的开集 I，若能与实数的开集 (r_1, r_2) 同胚，则简称为 R 的开区間。a 称为开区間 I 的端点，就是指 $\{a\}\cup I$ 与半开区間 $[r_1, r_2)$（或 $(r_1, r_2]$）同胚。在这个拓扑对应中，a 当然变换到 r_1（或 r_2）。

令 a 为只由扩散点构成的开区間 I 的端点。对 a 的足够小的邻域 U，如有

$$P(\text{对 } 0\leqslant t<\tau_U^{(a)} \text{ 中之 } t,\ x^{(a)}(t)\in\{a\}\cup I)=1, \qquad (56.1)$$

则称 a 为**一般通过点**。一般通过点仅限于它是一維点时才成为通过点(§ 52)。

在通过点的左右分类中，点的邻域同胚映射于实数区間的映象方式与方向有关。同样，对一般通过点，若把 $\{a\}\cup I$ 映射于 $[r_1, r_2)$，就是**一般右通过点**，而映射于 $(r_1, r_2]$ 时，就是**一般左通过点**。以后仅討論一般右通过点。

一般右通过点仍有可能是套点，若把这种过于简单的情况除外，取 a 的充分小的邻域 U，则除(56.1)外还可假定

$$E(\tau_U^{(b)})<\infty, \quad b\in U. \qquad (56.2)$$

設把 $\{a\}\cup I$ 内的点与所对应的 $[r_1, r_2)$ 内的点看成同一点。因接近 r_1 的点位于 U 内，故使 $[r_1, \xi)$ 包含于 U 内的 ξ 的上确界 $r_2'>r_1$。

若对 $r_1<\xi<r_2'$，令

$$p(\xi)=E(\tau_{[r_1,\xi)}^{(r_1)}), \qquad (56.3)$$

则 $0\leqslant p(\xi)<\infty$。因为 $x^{(r_1)}(t)$ 当 $0\leqslant t<\tau_U^{(r_1)}$ 时常处于 $[r_1, r_2)$ 内，

而且 t 在 $\tau_U^{(r_1)}$ 的附近时接近于 r_2'，故存在这样的 t: $x^{(r_1)}(t)=\xi$，$0\leqslant t<\tau_U^{(r_1)}$. 令满足这种关系的最小的 t 为 τ^*，对它用强 Markoff 性，则得

$$p(\xi)+E(\tau_U^{(\xi)})=E(\tau_U^{(r_1)}). \tag{56.4}$$

因为 $[r_1, r_2')$ 是一維扩散点的集合，故与正則点的情况(§ 54)一样，可以証明 $p_U(\xi)=E(\tau_U^{(\xi)})$ 满足

$$A_\xi p_U=-1.$$

故得

引理 1 $$A_\xi p=1. \tag{56.5}$$

引理 2 若 $f\in\mathfrak{D}(A_V)$，V 是 a 的任意邻域，且

$$A_V f(r_1)>0,$$

則对足够小的 $\varepsilon(>0)$，

$$f(\xi)\geqslant f(r_1),\quad r_1<\xi<r_1+\varepsilon.$$

証明 因为 $A_V f(r_1)>0$，故对足够小的 ε，

$$A_V f(\xi)>0,\quad r_1<\xi<r_1+\varepsilon.$$

因此 $f(\xi)$ 不能在 $r_1<\xi<r_1+\varepsilon$ 内取极大。故 $f(\xi)$ 在 $\xi=r_1$ 的某邻域 $(r_1\leqslant\xi<r_1+\delta)$ 上或者不增加，或者不减少。如是前一情况，則 $A r_1 f=0$，即 $A_V f(r_1)=0$，此与假設矛盾。

定理 1 若 $f\in\mathfrak{D}(A_V)$，則

$$A_V f(r_1)=\lim_{\xi\downarrow r_1}\frac{f(\xi)-f(r_1)}{p(\xi)}.$$

証明 若令 $A_V f(r_1)=\alpha$，則 $g(\xi)=f(\xi)-(\alpha-\varepsilon)p(\xi)$，$r_1<\xi<r_2'$，满足 $g\in\mathfrak{D}(A_V)$，并且

$$A_V g(r_1)=\alpha-(\alpha-\varepsilon)\cdot 1=\varepsilon>0.$$

故 g 在 r_1 的右边增加，因而

$$g(\xi)\geqslant g(r_1),\quad r_1<\xi<r_1+\delta,$$

于是

$$\frac{f(\xi)-f(r_1)}{p(\xi)}>\alpha-\varepsilon,\ r_1<\xi<r_1+\delta,$$

故

$$\varliminf_{\xi\downarrow r_1}\frac{f(\xi)-f(r_1)}{p(\xi)}\geqslant\alpha.$$

同样

$$\varlimsup_{\xi\downarrow r_1}\frac{f(\xi)-f(r_1)}{p(\xi)}\leqslant\alpha.$$

§57 最初通过时間的分布

令 $I=(r_1, r_2)$ 为 $x^{(a)}(t)$ 的正则区間，s 和 dm 分别为其标准尺度与标准测度。取 I 的子区間 $J=(j_1, j_2)$，$\bar{J}\subset J$，且令 a 为 J 內的任意点。令 $\tau_J^{(a)}$ 为 $x^{(a)}(t)$ 在 J 的最初通过时間。易見 $\tau_J^{(a)}$ 的平均值有限，因而它以概率 1 为有限的。$x^{(a)}(\tau_J^{(a)})$ 就是 j_1 或 j_2，根据这两种情况分别規定

$$\tau_1^{(a)}=\tau_J^{(a)},\quad \tau_2^{(a)}=\infty,$$

或

$$\tau_2^{(a)}=\tau_J^{(a)},\ \tau_1^{(a)}=\infty.$$

$\tau_i^{(a)}<\infty$ 等价于 $\tau_i^{(a)}=\tau_J^{(a)}$，卽 $x^{(a)}(\tau_J^{(a)})=j_i$. 如 §55 所証，

$$A_J=(D_mD_s^t)_J. \tag{57.1}$$

$s_J(a)=s(a; j_2, j_1)=P(\tau_2^{(a)}<\infty)$，而且

$$\left.\begin{aligned}&A_Js_J(a)=0,\\&s_J(j_1+0)=0,\qquad s_J(j_2-0)=1.\end{aligned}\right\} \tag{57.2}$$

这由 (57.1) 及 $s_J(a)=(s(a)-s(j_1))/(s(j_2)-s(j_1))$ 而为显然。

其次，若令 $p_J(a)=E(\tau_J^{(a)})$，則如 §54 所述，

$$A_Jp_J(a)=-1, \tag{57.3}$$

进而还可証明

$$p_J(j_1+0)=p_J(j_2-0)=0. \tag{57.3'}$$

实际上，因 j_1 是正則点，故对其足够小的邻域 U，得 $p_U(x)<\varepsilon$，$x\in U$. $(p_U(x)=E(\tau_U^{(x)}))$. 取一充分小 δ，使 $K=[j_1, j_1+\delta]\subset U$. 对 $x\in K$ 有

$$p_J(x)=p_K(x)+s(x;\xi, j_1)p_J(\xi)<\varepsilon+s(x;\xi, j_1)p_J(\xi).$$

若令 $x\to j_1$，則 $s(x;\xi, j_1)\to 0$. 于是

$$p_J(j_1+0)\leqslant\varepsilon,\quad \text{故}\quad p_J(j_1+0)=0.$$

同样

$$p_J(j_2-0)=0.$$

定理 1 s_J 及 p_J 分别由(57.2)和(57.3)，(57.3′)决定。

証明 由上述已知 s_J 及 p_J 分别满足这些条件。又由(57.1)知 $A_Ju=0$ 有二个綫性独立的解，因而由上述的边界条件，可知解是唯一决定的。

以后对 $i=1, 2$，令

$$\varphi_i(dt, a)=P(\tau_i^{(a)}\in dt),$$

$$\hat{\varphi}_{i\lambda}(a)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi_i(dt, a)=E(e^{-\lambda\tau_i^{(a)}}).$$

定理 2 $\hat{\varphi}_{1\lambda}$ 是

$$A_J\hat{\varphi}_{1\lambda}=\lambda\hat{\varphi}_{1\lambda},\quad \hat{\varphi}_{1\lambda}(j_1+0)=1,\quad \hat{\varphi}_{1\lambda}(j_2-0)=0 \tag{57.4}$$

的唯一解；同样 $\hat{\varphi}_{2\lambda}$ 是

$$A_J\hat{\varphi}_{2\lambda}=\lambda\hat{\varphi}_{2\lambda},\quad \hat{\varphi}_{2\lambda}(j_2-0)=1,\quad \hat{\varphi}_{2\lambda}(j_1+0)=0 \tag{57.5}$$

的唯一解。

証明 考虑 $\hat{\varphi}_{1\lambda}$. 如前，令

$$P_J(t, a, dy)=P_J(x^{(a)}(t)\in dy, \tau_J^{(a)}>t).$$

$$\varphi_1(dt+s, a)=\int_J P_J(s, a, dy)\varphi_1(dt, y),$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi_1(dt+s, a)=\int_J P_J(s, a, dy)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi_1(dt, y),$$

$$e^{\lambda s}\int_s^{\infty} e^{-\lambda t}\varphi_1(dt, a)=\int_J P_J(s, a, dy)\hat{\varphi}_{1\lambda}(y).$$

但

$$\int_s^{\infty} e^{-\lambda t}\varphi_1(dt, a)=\hat{\varphi}_{1\lambda}(a)-\int_0^s e^{-\lambda t}\varphi_1(dt, a),$$

$$\int_0^s e^{-\lambda t}\varphi_1(dt, a)\leqslant\varphi_1([0, s], a)\leqslant P(\tau_U^{(a)}<s)=o(s).$$

故

$$e^{\lambda s}(\hat{\varphi}_{1\lambda}(a)+o(s))=\int_J P_J(s, a, dy)\hat{\varphi}_{1\lambda}(y).$$

由此立得

$$A_a\hat{\varphi}_{1\lambda}=\lambda\hat{\varphi}_{1\lambda}(a).$$

如能証明右边关于 a 是連續的,则即已証明在 J 上

$$A_J\hat{\varphi}_{1\lambda}=\lambda\hat{\varphi}_{1\lambda}.$$

現在,象 $\hat{\varphi}_{1\lambda}(b)$ 定义于 J 上一样,若定义于另一区間 K 上时,就記为 $\hat{\varphi}_{1\lambda}(b;K)$。依照以前多次用到的强 Markoff 性的証法,当 $a<b$ 时,

$$\hat{\varphi}_{1\lambda}(b)=\hat{\varphi}_{1\lambda}(b;(a, j_2))\hat{\varphi}_{1\lambda}(a)\leqslant\hat{\varphi}_{1\lambda}(a).$$

故 $\hat{\varphi}_{1\lambda}$ 单調下降。当取 $a<c<b$,使 a, b 充分接近于 c 时,若能証

$$\hat{\varphi}_{1\lambda}(b;(a, j_2))>1-\varepsilon,$$

则得証 $\hat{\varphi}_{1\lambda}$ 的連續性。

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{1\lambda}(b;(a, j_2))&=E\{e^{-\lambda\tau^{(b)}_{(a,j_2)}};\ x^{(b)}(\tau^{(b)}_{(a,j_2)})=a\}\\&\geqslant e^{-\lambda t}P(\tau^{(b)}_{(a,j_2)}<t,\ x^{(b)}(\tau^{(b)}_{(a,j_2)})=a)\\&\geqslant e^{-\lambda t}\{P(\tau^{(b)}_{(a,k)}<t)-P(x^{(b)}(\tau^{(b)}_{(a,k)})=k)\}.\end{aligned}$$

其中 k 是 b 与 j_2 之間的点。

$$P(\tau^{(b)}_{(a,k)}\geqslant t)\leqslant\frac{1}{t}E(\tau^{(b)}_{(a,k)}),$$

$$P(x^{(b)}(\tau^{(b)}_{(a,k)})=k)=\frac{s(b)-s(a)}{s(k)-s(a)}.$$

取 c 的充分小的邻域 U,使 $E(\tau_U^{(b)})<\delta t$,在 U 内取 a, b, k, $a<c<$

$b<k$,使 a,b 极其接近,以致 $(s(b)-s(a))/(s(k)-s(a))<\delta$。因为

$$E(\tau_{(a,k)}^{(b)})\leqslant E(\tau_U^{(b)})<\delta t,$$

故

$$\hat{\varphi}_{1\lambda}(b;(a,j_2))\geqslant e^{-\lambda t}(1-2\delta),$$

取 t 足够小,則上式右边

$$>(1-\delta)(1-2\delta)>1-\varepsilon\ \left(\delta=\frac{\varepsilon}{3}\right);$$

故得証 $\hat{\varphi}_{1\lambda}(a)$ 的連續性。

剩下来的是要証 $\hat{\varphi}_{1\lambda}(j_1+0)=1$, $\hat{\varphi}_{1\lambda}(j_2-0)=0$ 以及唯一性。$\hat{\varphi}_{1\lambda}(a)$ 随 a 增加而减少,并且处于 0 与 1 之間。若在 j_1 的左边取 k_1,在 a 与 j_2 之間取 k_2,則仿上証連續性一样可得

$$\hat{\varphi}_{1\lambda}(a)\geqslant e^{-\lambda t}\{P(\tau_{(k_1,k_2)}^{(a)}<t)-P(x^{(a)}(\tau_{(k_1,k_2)}^{(a)})=k_2)\}.$$

由此可見当 a 充分接近于 j_1 时,$\hat{\varphi}_{1\lambda}(a)>1-\varepsilon$,故 $\hat{\varphi}_{1\lambda}(j_1+0)=1$. 同样 $\hat{\varphi}_{2\lambda}(j_2-0)=1$. 由于

$$\hat{\varphi}_{1\lambda}(a)+\hat{\varphi}_{2\lambda}(a)=E(e^{-\lambda\tau_J^{(a)}})\leqslant 1,$$

故

$$\hat{\varphi}_{1\lambda}(j_2-0)\leqslant 1-\hat{\varphi}_{2\lambda}(j_2-0)=0,\ \text{即}\ \hat{\varphi}_{1\lambda}(j_2-0)=0.$$

为証唯一性,只要由 $A_Ju=0$, $u(j_1+0)=u(j_2-0)=0$ 推出 $u\equiv 0$ 即可。如在某些点上 $u>0$,則 u 在 J 内取正的最大值,設为 $u(a)$,則 $A_Ju(a)\leqslant 0$,与 $u(a)\leqslant 0$ 矛盾,故 $u\leqslant 0$. 同样証明 $u\geqslant 0$,因之 $u\equiv 0$.

定理 3 令 $\hat{\varphi}_\lambda(a)=E(e^{-\lambda\tau_J^{(a)}})$,則它是

$$A_J\hat{\varphi}_\lambda=\lambda\hat{\varphi}_\lambda,\quad \hat{\varphi}_\lambda(j_1+0)=\hat{\varphi}_\lambda(j_2-0)=1$$

的唯一解。

証明 由上定理所用的公式

$$\hat{\varphi}_\lambda(a)=E(e^{-\lambda\tau_J^{(a)}})=\hat{\varphi}_{1\lambda}(a)+\hat{\varphi}_{2\lambda}(a),$$

即得

$$A_J\hat{\varphi}_\lambda = A_J\hat{\varphi}_{1\lambda} + A_J\hat{\varphi}_{2\lambda} = \lambda\hat{\varphi}_{1\lambda} + \lambda\hat{\varphi}_{2\lambda} = \lambda\hat{\varphi}_\lambda.$$

又

$$\hat{\varphi}_\lambda(j_1+0) = \hat{\varphi}_{1\lambda}(j_1+0) + \hat{\varphi}_{2\lambda}(j_1+0) = 1,$$

$$\hat{\varphi}_\lambda(j_2-0) = \hat{\varphi}_{1\lambda}(j_2-0) + \hat{\varphi}_{2\lambda}(j_2-0) = 1.$$

故 $\hat{\varphi}_\lambda$ 满足定理中的方程及边界条件。解的唯一性証明与上定理一样。

§58 古典扩散过程

令 R 为实数集合 R^1 或其区間 $[r_1, r_2]$. 令 $x^{(a)}(t)$ 为 R 上的扩散过程。由 Ray 定理,有

$$P\{|x^{(\xi)}(t)-\xi|>\varepsilon\}/t \to 0 \quad (t\to 0). \tag{58.1}$$

若假定

$$a(\xi) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{E\{x^{(\xi)}(t)-\xi; |x^{(\xi)}(t)-\xi|<\varepsilon\}}{t}, \tag{58.2}$$

$$b(\xi) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{E\{(x^{(\xi)}(t)-\xi)^2; |x^{(\xi)}(t)-\xi|<\varepsilon\}}{t} \tag{58.3}$$

对某 $\varepsilon>0$ 存在,則由(58.1),对所有的 $\varepsilon>0$ 都存在,而且其值与 ε 无关。若 $a(\xi)$ 与 $b(\xi)$ 都是 $\xi\in(r_1, r_2)$ 的連續函数,則 $x^{(a)}(t)$ 叫做 $R(=(r_1, r_2])$ 上的古典扩散过程或 Kolmogoroff 扩散过程。利用 $x^{(a)}(t)$ 的轉移概率 $P(t, a, E)$,可把 $a(\xi)$, $b(\xi)$ 写为

$$a(\xi) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_{|y-\xi|<\varepsilon} (y-\xi)P(t, \xi, dy), \tag{58.2'}$$

$$b(\xi) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\int_{|y-\xi|<\varepsilon} (y-\xi)^2 P(t, \xi, dy). \tag{58.3'}$$

$a(\xi)$ 可取正負值,但 $b(\xi)\geqslant 0$.

例如,对 Wiener 过程,求得 $a(\xi)$, $b(\xi)$ 为

$$a(\xi)=0, \quad b(\xi)=1. \tag{58.4}$$

定理 1 若 f 是 $J=(j_1, j_2)$ $(r_1\leqslant j_1<j_2\leqslant r_2)$ 内二次連續可微函数，則 $f\in\mathfrak{D}(A_J)$，而且

$$A_J f(\xi)=\left(a(\xi)\frac{d}{d\xi}+\frac{b(\xi)}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)f(\xi). \qquad (58.5)$$

証明 因上式右边是 ξ 的連續函数，故只要証明 $A_\xi f$ 等于右边卽可。对 $\xi\in J$，$\delta>0$，取 $\varepsilon>0$ 充分小，就 $|y-\xi|<\varepsilon$ 而論，有

$$f(y)-f(\xi)=f'(\xi)(y-\xi)+\frac{f''(\xi)\pm\delta}{2}(y-\xi)^2,$$

$$\begin{aligned}\int_{|y-\xi|<\varepsilon} & f(y)P(t,\xi,dy)-f(\xi)\\ &=\int_{|y-\xi|<\varepsilon}(f(y)-f(\xi))P(t,\xi,dy)+o(t)\\ &=f'(\xi)\int_{|y-\xi|<\varepsilon}(y-\xi)P(t,\xi,dy)\\ &\quad+\frac{f''(\xi)\pm\delta}{2}\int_{|y-\xi|<\varepsilon}(y-\xi)^2P(t,\xi,dy)+o(t)\\ &=f'(\xi)a(\xi)\cdot t+\frac{f''(\xi)\pm\delta}{2}b(\xi)\cdot t+o(t).\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\,\frac{1}{t}&\left\{\int_{|y-\xi|<\varepsilon}f(y)P(t,\xi,dy)-f(\xi)\right\}\\ &\leqslant a(\xi)f'(\xi)+\frac{b(\xi)}{2}f''(\xi)+\frac{b(\xi)}{2}\cdot\delta.\end{aligned}$$

由 (58.1)，左边与 ε 无关，故右边的 δ 可以任意小，因此这一极限 $\leqslant af'+\frac{b}{2}f''$. 同样取下极限就有 $\geqslant af'+\frac{b}{2}f''$. 結果得 $f\in\mathfrak{D}(A_\xi)$，而且 $A_\xi f=af'(\xi)+\frac{b}{2}f''(\xi)$.

定理 2 若 $b(\xi)>0$，則 ξ 是正則点。

証明 若 ξ 是右通过点，則对 $\mathfrak{D}(A_\xi)$ 中在 ξ 的邻域 J 上增加的函数 f 有 $A_\xi f\geqslant 0$. 但若在 ξ 的邻域上定义 f 为

$$f(x)=(x-\xi)-\beta(x-\xi)^2,$$

则

$$\left(af'+\frac{b}{2}f''\right)(\xi)=a-\beta b.$$

若令 $\beta>a(\xi)/b(\xi)$，则上式为负，故得

$$A_\xi f=A_J f(\xi)=\left(af'+\frac{b}{2}f''\right)(\xi)<0,$$

而发生矛盾。因此不能是右通过点。同样証明它不能是左通过点。故是正則点。

现在，对于在 J 上二次連續可微的函数，定义算子 D_J 为

$$D_J f(\xi)=a(\xi)f'(\xi)+\frac{b(\xi)}{2}f''(\xi). \tag{58.6}$$

定理3 若在 J 上 $b(\xi)>0$，則

$$A_J=D_J. \tag{58.7}$$

証明 由定理1，$A_J>D_J$. 将 D_J 变形得

$$D_J f=\frac{b}{2}e^{-B}\left(e^B\frac{2a}{b}f'+e^B f''\right)\quad\left(B=\int\frac{2a}{b}d\xi\right)$$

$$=\frac{b}{2}e^{-B}(e^B f')'=\frac{1}{\frac{2}{b}e^B}\frac{d}{d\xi}\frac{1}{e^{-B}}\frac{d}{d\xi}f(\xi)$$

$$=\frac{d}{dm_1}\frac{d}{ds_1}f(\xi).\quad\left(s_1=\int e^{-B}d\xi,\ \ m_1=\int\frac{2}{b}e^B d\xi\right).$$

因为 $A_J=(D_m D_s^+)_J$，故 $A_J u=0$ 的全体解为 $\{\alpha+\beta s\}$，$D_J u=0$ 的全体解为 $\{\alpha+\beta s_1\}$. 由于 $A_J>D_J$，故前者包含后者。因为二者都是二維的綫性空間，所以一致。故得 $s=\alpha+\beta s_1$. 其次，若令

$$q=\int m_1 ds_1=\int m_1 e^{-B}d\xi,$$

則 $D_J q=1$，故 $A_J q=1$，亦即 $D_m D_s^+ q=1$.

$$q=\int m\,ds+\gamma s+\delta=\beta\cdot\int m\,ds_1+\gamma' s_1+\delta',$$

$$m_1=\frac{dq}{ds_1}=\beta m+\delta',\quad m=\gamma''+\frac{1}{\beta}m_1.$$

故可以考虑 $m=m_1$, $s=s_1$. 若 $f\in\mathfrak{D}(A_J)$, 则 $D_{m_1}D_{s_1}^{+}f(\xi)$ 连續。因为 $\frac{2}{b}\cdot e^B$ 是連續而且是正的，故上述連續性实际上就表示 $(e^{-B}f')'$ 的連續性。故 e^Bf' 是連續可微的。由于 $(e^{-B})'=-e^{-B}\cdot\frac{2a}{b}$, 故 e^{-B} 是連續可微的，从而 f' 也如此，即 f 是二次連續可微的。故 $f\in\mathfrak{D}(D_J)$，于是 A_J 与 D_J 連同定义域一起是一致的。

例 对 Wiener 过程，

$$D_J=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2},\quad \mathfrak{D}(D_J)=C_2(J).$$

由上述定理，此算子即 A_J. 令 $J=(j_1, j_2)$ 为有限区間；且令 $s_J(x)$ 为自 x 出发先到达右端点的概率，则由上所述，$s_J(x)$ 是

$$A_Ju=0,\quad u(j_2)=1,\quad u(j_1)=0$$

的解。由于 $A_J=D_J$, 故 $A_Ju=0$ 表示 $u''=0$, 即 $u=\alpha x+\beta$. 故得

$$s_J(x)=\frac{x-j_1}{j_2-j_1}.$$

这表示 x 就是标准尺度。

又 $P_J(x)=E(\tau_J^{(x)})$ 是

$$A_Ju=-1,\quad u(j_1)=u(j_2)=0$$

的解。由 $A_Ju=-1$, 即 $u''=-2$ 得 $u=-x^2+cx+d$, 由 $u(j_1)=u(j_2)=0$ 定出 c, d, 得

$$u=(j_2-x)(x-j_1).$$

标准測度 dm 就是

$$m=-\frac{d}{ds}p_J=-\frac{d}{dx}p_J=2x,\ 故\ dm=2dx.$$

若要求上节中定义的 $\phi_\lambda(x)=E(e^{-\lambda\tau_J^{(x)}})$, 只要解

$$\frac{1}{2}\lambda u''=\lambda u,\quad u(j_1)=u(j_2)=1,$$

得

$$u=\alpha e^{\sqrt{2\lambda}x}+\beta e^{-\sqrt{2\lambda}x},$$

而 α, β 由 $u(j_1)=u(j_2)=1$ 决定。

§59 关于 Feller 算子 $D_mD_s^+$ 的端点的分类

暂时放下 Markoff 过程的概念，一般地假定在区間 $I=(r_1, r_2)$ 上已定义連續、狹义增加函数 $s(x)$ 与右連續增加函数 m，象以前一样，定义 $(D_mD_s^+)_I$，并称之为 **Feller 算子**。现在，根据 $D_mD_s^+$ 把 I 的端点 r_1, r_2 分为四种：**正則边界** (regular boundary)、**流出边界** (exit boundary)、**流入边界** (entrance boundary) 和**自然边界** (natural boundary)。为此首先引入下面的数：

$$\sigma_1=\iint\limits_{r_1<y<x<r_1'} dm(x)ds(y), \quad \mu_1=\iint\limits_{r_1<y<x<r_1'} ds(x)dm(y),$$

$$\sigma_2=\iint\limits_{r_2>y>x>r_2'} dm(x)ds(y), \quad \mu_2=\iint\limits_{r_2>y>x>r_2'} ds(x)dm(y).$$

当

$\sigma_i<\infty$，$\mu_i<\infty$ 时，r_i 称为正則，

$\sigma_i<\infty$，$\mu_i=\infty$ 时，r_i 称为流出，

$\sigma_i=\infty$，$\mu_i<\infty$ 时，r_i 称为流入，

$\sigma_i=\infty$，$\mu_i=\infty$ 时，r_i 称为自然。

σ_i，μ_i 虽与 r_i' 的选擇有关，但它們是有限的或无限的却与此选擇无关，因而上述的分类也是这样。

这种分类的概率意义留在以后講，現在举出四种边界的例。

例 1 設 $D_mD_s^+=\frac{d^2}{dx^2}$，$I=(-\infty, \infty)$，則 $m=x$，$s=x$，故

$$\sigma_2=\iint\limits_{\infty>y>x>r_2'} dx\,dy=\int_{r_2'}^{\infty}(y-r_2')dy=\infty,$$

$$\mu_2=\iint\limits_{\infty>y>x>r_2'} dx\,dy=\infty.$$

故 ∞ 是自然边界，同样，$-\infty$ 也是自然边界。

例 2 若令 $D_mD_s^+=\frac{d^2}{dx^2}$，$I=(-\infty, 0)$，則 $-\infty$ 是自然边界，0 是正

則边界。

例 3 設 $D_mD_s^+=\frac{d}{dx}+x^2\frac{d^2}{dx^2}$，$I=(0,2)$，

$$\frac{d}{dx}+x^2\frac{d^2}{dx^2}=\frac{d}{x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx}\frac{d}{e^{\frac{1}{x}}dx},$$

故

$$dm=x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx,\quad ds=e^{\frac{1}{x}}dx.$$

因在 0 处有

$$\sigma=\iint_{0<y<x<1}x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{y}}dx\,dy=\infty,$$

$$\mu=\iint_{0<y<x<1}y^{-2}e^{-\frac{1}{y}}e^{\frac{1}{x}}dy\,dx<\infty,$$

故 0 是流入边界。易証 2 是正則的。

例 4 若 $D_mD_s^+=-\frac{d}{dx}+x^2\frac{d^2}{dx^2}$，$I=(0,\infty)$，則 0 是流出，$\infty$ 是自然。

§60 齐次方程 $(\lambda-D_mD_s^+)u=0$ $(\lambda>0)$ 的特解

为方便計，可設 $r_1<0<r_2$，也可以令

$$m(0-)=m(0+)=0,\quad s(0)=0.$$

这齐次方程的通解，就是下述特解 e_0 和 e_1 的綫性組合。

$$D_mD_s^+e_0=\lambda e_0,\quad e_0(0)=1,\quad D_s^+e_0(0)=0,\tag{60.1}$$

$$D_mD_s^+e_1=\lambda e_1,\quad e_1(0)=0,\quad D_s^+e_1(0)=1.\tag{60.2}$$

为求 e_0 与 e_1，只須解下列积分方程

$$e_0(x)=1+\lambda\int_0^x\int_0^\xi e_0(\eta)dm(\eta)ds(\xi),$$

$$e_1(x)=s(x)+\lambda\int_0^x\int_0^\xi e_1(\eta)dm(\eta)ds(\xi).$$

因为 $x<0$ 的情形类似，故只就 $x\geq0$ 时来叙述求 $e_1(x)$ 的方法。若令

$$p_1\circ p_2\circ\cdots\circ p_n(x)=\int\cdots\int_{0<\xi_1<\cdots<\xi_n<x}dp_1(\xi_1)\cdots dp_n(\xi_n),$$

則

$$(p_1\circ p_2\circ\cdots\circ p_m)\circ p_{m+1}\circ\cdots\circ p_{m+n}=p_1\circ p_2\circ\cdots\circ p_{m+n}.$$

但

$$(p_1\circ p_2)\circ p_3=p_1\circ(p_2\circ p_3),\quad p_1\circ p_2=p_2\circ p_1$$

未必成立。

利用这些記号，上述积分方程可写为

$$e_0=1+\lambda e_0\circ m\circ s, \tag{60.1'}$$

$$e_1=s+\lambda e_1\circ m\circ s. \tag{60.2'}$$

利用逐步逼近法，形式地得到展式

$$e_0=1+\lambda m\circ s+\lambda^2 m\circ s\circ m\circ s+\lambda^3 m\circ s\circ m\circ s\circ m\circ s+\cdots,$$

$$e_1=s+\lambda s\circ m\circ s+\lambda^2 s\circ m\circ s\circ m\circ s+\lambda^3 s\circ m\circ s\circ m\circ s\circ m\circ s+\cdots.$$

如能証明这些展式收斂，卽得上述二方程的解。

今命

$$\sigma=m\circ s,\quad \mu=s\circ m.$$

上节所述的 σ_2 与 μ_2 就是 $\sigma(r_2)$，$\mu(r_2)$，因此随着 r_2 为正則、流出、流入与自然边界，$\sigma(r_2)$，$\mu(r_2)$ 就应分别是：二者都有限，只前者有限，只后者有限，与二者都无限。

由数学归納法得

$$0\leqslant \underset{(1)}{m}\circ s\circ \underset{(2)}{m}\circ s\circ\cdots\circ \underset{(n)}{m}\circ s(x)\leqslant\frac{\sigma(x)^n}{n!},$$

$$0\leqslant s\circ \underset{(1)}{m}\circ s\circ \underset{(2)}{m}\circ s\circ\cdots\circ \underset{(n)}{m}\circ s(x)\leqslant\frac{s(x)\sigma(x)^n}{n!}.$$

故 e_0，e_1 的級数收斂，而且有

$$e_0(x)\leqslant e^{\lambda\sigma(x)}, \tag{60.3}$$

$$e_1(x)\leqslant s(x)\cdot e^{\lambda\sigma(x)}. \tag{60.4}$$

又有

$$e_0(x)\geqslant\lambda m\circ s(x)=\lambda\sigma(x), \tag{60.5}$$

$$e_1(x)\geqslant\lambda s\circ m\circ s(x). \tag{60.6}$$

现在利用这些不等式来研究 $e_i(x)$ 在 r_2 的极限。

首先注意下列事实

r_2 为正则$\to m(r_2)<\infty$, $s(r_2)<\infty$,

r_2 为流出$\to m(r_2)=\infty$, $s(r_2)<\infty$,

r_2 为流入$\to m(r_2)<\infty$, $s(r_2)=\infty$,

r_2 为自然$\to m(r_2)\leqslant\infty$, $s(r_2)\leqslant\infty$, 至少有一个为 ∞,

因为

$$\sigma(r_2)=\int_0^{r_2} m(y)ds(y),$$

所以

$$\sigma(r_2)\geqslant m(r_2')\,(s(r_2)-s(r_2')),$$

故若 $s(r_2)=\infty$, 则 $\sigma(r_2)=\infty$, 因此当 r_2 为正则, 流出时, $s(r_2)<\infty$. 同样,当 r_2 为正则,流入时, $m(r_2)<\infty$。

又由

$$\mu(r_2)=\int_0^{r_2} s(y)dmy$$

有 $\mu(r_2)\leqslant s(r_2)\cdot m(r_2)$。流出时 $s(r_2)<\infty$, $\mu(r_2)=\infty$。故得 $m(r_2)=\infty$。同样,流入时 $s(r_2)=\infty$。若 $m(r_2)$ 与 $s(r_2)$ 均有限, 则 $\mu(r_2)$, $\sigma(r_2)$ 也均有限,故 r_2 为正则。自然边界时, m 和 s 中至少有一个为 ∞. 作为 $m(r_2)=\infty$, $s(r_2)<\infty$, 且 r_2 为自然边界的例,可取

$$r_2=1,\ s(x)=x,\ m(x)=(1-x)^{-1}.$$

其次, 作为 $m(r_2)<\infty$, $s(r_2)=\infty$, 而且 r_2 是自然边界的例, 可举

$$r_2=1,\ s(x)=(1-x)^{-1},\ m(x)=x.$$

最后,如令

$$r_2=\infty,\ s(x)=x,\ m(x)=x,$$

则得到 $m(r_2)=\infty$, $s(r_2)=\infty$, r_2 是自然边界的例。

当 r_2 为正则或流出时, 由 (60.3~60.4), $\sigma(r_2)$, $s(r_2)<\infty$,

得 $e_0(r_2)$ 和 $e_1(r_2)<\infty$。当 r_2 为流入或自然时，则 $\sigma(r_2)=\infty$，故由(60.5)得

$$e_0(r_2)=\infty,$$

至于 $e_1(x)$，由(60.6)有

$$e_1(x)\geqslant\lambda s\circ m\circ s(x)=\lambda\int_0^x\int_0^\xi s(\eta)dm(\eta)ds(\xi)$$

$$\geqslant\lambda s(r_2')\int_{r_2'}^x\int_{r_2}^\xi dm(\eta)ds(\xi)\rightarrow\lambda s(r_2')\cdot\sigma(r_2)=\infty.$$

其次，为求 $D_s^+e_0(x)$，$D_s^+e_1(x)$，若形式地微分上述 e_0 与 e_1 的展式，得

$$D_s^+e_0(x)=\lambda m+\lambda^2 m\circ s\circ m+\lambda^3 m\circ s\circ m\circ s\circ m+\cdots,$$

$$D_s^+e_1(x)=1+\lambda s\circ m+\lambda^2 s\circ m\circ s\circ m+\cdots.$$

若能証此式在 I 内为广义一致收斂，则得証这等式成立。証法与上列 e_0, e_1 的展式相同。而且 $D_s^+e_i(r_2)$，$i=1, 2$

在 r_2 为正则或流入时，为有限，

在 r_2 为流出或自然时，为无限。

証明也与 $e_i(r_2)$ 的証明相同。

§61 齐次方程 $(\lambda-D_mD_s^+)u=0$ $(\lambda>0)$ 的一般解

令 u_1 和 u_2 为

$$(\lambda-D_mD_s^+)u=0\quad(\lambda>0)\tag{61.1}$$

的两个任意解。对这 u_1, u_2, 称

$$W=W(u_1, u_2)=D_s^+u_1\cdot u_2-D_s^+u_2\cdot u_1$$

为 u_1, u_2 的朗斯基 (**Wronskian**)。

定理 1 W 与 x 无关。

引理 1 令 u_1 v 为有界变差函数 (function of bounded variation)，則

$$d(u\cdot v)=v^*du+u_*dv=v_*du+u^*dv,$$

(dw 是对应于 w 的有符号测度(signed measure), $w^*(x)=w(x+0)$, $w_*(x)=w(x-0)$)。

这引理由

$$u(x_i)v(x_i)-u(x_{i-1})v(x_{i-1})$$
$$=v(x_i)(u(x_i)-u(x_{i-1}))+u(x_{i-1})(v(x_i)-v(x_{i-1}))$$
$$=v(x_{i-1})(u(x_i)-u(x_{i-1}))+u(x_i)(v(x_i)-v(x_{i-1}))$$

而明显。利用此引理来証明本节定理 1。

$$dW=u_2d(D_s^+u_1)+D_s^+u_1du_2-u_1d(D_s^+u_2)-D_s^+u_2du_1$$
$$=u_2\lambda u_1dm+D_s^+u_1D_s^+u_2ds-u_1\lambda u_2dm-D_s^+u_2D_s^+u_1ds=0.$$

特别,求前节中 e_1, e_0 的 朗斯基,則得

$$W(e_1, e_0)=W(e_1, e_0)(0)=(D_s^+e_1\cdot e_0-D_s^+e_0\cdot e_1)(0)=1.$$

引理 2 $\frac{e_0}{e_1}>\frac{D_s^+e_0}{D_s^+e_1}\quad(x>0)$.

証明 $\frac{e_0}{e_1}-\frac{D_s^+e_0}{D_s^+e_1}=\frac{W(e_1, e_0)}{e_1D_s^+e_1}=\frac{1}{e_1D_s^+e_1}>0.$

引理 3 $\frac{e_0}{e_1}$ 随 x 增加而减少。

証明 $D_s^+\left[\frac{e_0}{e_1}\right]=\frac{-W(e_1, e_0)}{e_1^2}=-\frac{1}{e_1^2}<0.$

引理 4 $\frac{D_s^+e_0}{D_s^+e_1}$ 随 x 增加而增加。

証明
$$D_m\left(\frac{D_s^+e_0}{D_s^+e_1}\right)=\frac{D_mD_s^+e_0\cdot D_s^+e_1-D_mD_s^+e_1\cdot D_s^+e_0}{(D_s^+e_1)^2}$$
$$=\frac{\lambda W(e_1, e_0)}{(D_s^+e_1)^2}=\frac{\lambda}{(D_s^+e_1)^2}>0.$$

引理 5 $x\uparrow r_2$ 时,

$$\frac{e_0}{e_1}-\frac{D_s^+e_0}{D_s^+e_1}=\frac{1}{e_1D_s^+e_1}\begin{cases}\to 0 & (\text{当 } r_2 \text{ 不是正則时}),\\ \to c>0 & (\text{当 } r_2 \text{ 是正則时})。\end{cases}$$

有了这些准备后,試在齐次方程 (61.1) 的解中找出滿足二条件:

(A) $u>0$,

(B) $u\downarrow$ ($x\uparrow$时)

的解。由(A)得 $u(0)>0$, 故求出 $u(0)=1$ 的解后，再乘以正的倍数卽可。也就是要求形为

$$u=e_0-\gamma e_1$$

的解。由条件(A),

$$\gamma<e_0/e_1 \quad (x>0)$$

是必要的。又由(B)得 $D_s^+u<0$, 故

$$\gamma>D_s^+e_0/D_s^+e_1 \quad (x>0)$$

是必要的。由上述引理,

$$\bar{\gamma}=\lim_{x\uparrow r_2}\frac{e_0}{e_1}, \quad \underline{\gamma}=\lim_{x\uparrow r_2}\frac{D_s^+e_0}{D_s^+e_1} \tag{61.2}$$

存在,而且 γ 满足

$$\bar{\gamma}\geqslant\gamma\geqslant\underline{\gamma}. \tag{61.3}$$

反之,对如此的 γ, 令

$$u=e_0-\gamma e_1,$$

则在 $x>0$ 时,满足(A),(B). 至于在 $x<0$ 时，只要对 $x<0$ 考察 e_0, e_1 的展式就可看出: e_0, $-e_1$ 都恒为正，而且是减少函数。综合上述卽得

定理2 齐次方程的正而且下降的解，在 $u(0)=1$ 的条件下，由

$$u=e_0-\gamma e_1$$

給出。这里 γ 是 $\underline{\gamma}$ 与 $\bar{\gamma}$ 之間的任意正数。若 r_2 正则,则 $\underline{\gamma}<\bar{\gamma}$,故所求的解有无数个,都处在 $\bar{u}=e_0-\underline{\gamma}e_1$ 与 $\underline{u}=e_0-\bar{\gamma}e_1$ 之間。在其他場合, $\underline{\gamma}=\bar{\gamma}$, 故 u 是唯一的。

其次,研究 u 在 r_2 上的值。若 r_2 为正则，则

$$\bar{u}(r_2)=e_0(r_2)-\frac{D_s^+e_0(r_2)}{D_s^+e_1(r_2)}e_1(r_2)=\frac{1}{D_s^+e_1(r_2)},$$

$$\underline{u}(r_2)=e_0(r_2)-\frac{e_0(r_2)}{e_1(r_2)}e_1(r_2)=0.$$

对流出，也有 $$u(r_2)=0.$$

对流入，则

$$u(r_2)=\lim_{x\to r_2}\left\{e_0(x)-\frac{D_s^+e_0}{D_s^+e_1}(r_2)e_1(x)\right\}$$

$$\leqslant\lim_{x\to r_2}\left\{e_0(x)-\frac{D_s^+e_0(x)}{D_s^+e_1(x)}e_1(x)\right\}=\frac{1}{D_s^+e_1(r_2)}.$$

又对充分大的 x,

$$u(r_2)+\varepsilon>e_0(x)-\frac{D_s^+e_0}{D_s^+e_1}(r_2)e_1(x).$$

其次对充分大的 y,

$$u(r_2)+2\varepsilon>e_0(x)-\frac{D_s^+e_0(y)}{D_s^+e_1(y)}e_1(x).$$

若 $y>x$, 则

$$>e_1(y)-\frac{D_s^+e_0(y)}{D_s^+e_1(y)}e_1(y)$$

$$\left(\text{因为 } D_s^+\left\{e_0(x)-\frac{D_s^+e_0(y)}{D_s^+e_1(y)}e_1(x)\right\}\right.$$

$$\left.=\left\{\frac{D_s^+e_0(x)}{D_s^+e_1(x)}-\frac{D_s^+e_0(y)}{D_s^+e_1(y)}\right\}D_s^+e_1(x)>0\right).$$

故

$$u(r_2)+2\varepsilon>\frac{1}{D_s^+e_1(y)},$$

因而

$$u(r_2)\geqslant\frac{1}{D_s^+e_1(r_2)},$$

这样就有

$$u(r_2)=\frac{1}{D_s^+e_1(r_2)}.$$

对自然边界，上式虽也成立，但因 $D_s^+e_1(r_2)=\infty$, 故 $u(r_2)=0$.

用同样方法也可求得 $D_s^+u(r_2)$. 概括起来就得

定理 3 定理 2 的 u 及其 D_s^+u 在 r_2 上的极限值是

$$u(r_2)=\begin{cases}0 & (\text{当 } r_2 \text{ 为流出或自然；为正则时，则 } \underline{u}=0),\\ \dfrac{1}{D_s^+e_1(r_2)} & \left(\text{当 } r_2 \text{ 为流入；为正则时，则 } \bar{u}=\dfrac{1}{D_s^+e_1(r_2)}\right).\end{cases}$$

$$D_s^+u(r_2)=\begin{cases}0 & (\text{当 } r_2 \text{ 为流入或自然；为正则时，则 } D_s^+\bar{u}=0),\\ -\dfrac{1}{e_1(r_2)} & \left(\text{当 } r_2 \text{ 为流出；为正则时，则 } D_s^+\underline{u}=-\dfrac{1}{e_1(r_2)}\right).\end{cases}$$

因为此 u 与 e_0 是綫性独立的，故任意的解是这二解的綫性組合 $\alpha u+\beta e_0$. 因为 $u(r_2)$, $D_s^+u(r_2)$ 都有限，故若 $\alpha u+\beta e_0$ 为 ∞, 那末这是来自 e_0. 故得

定理 4 上述 u 以外的解 v 为

$$|v(r_2)|<\infty \ (\text{正则，流出}), \qquad =\infty \ (\text{流入，自然}),$$
$$|D_s^+v(r_2)|<\infty \ (\text{正则，流入}), \quad =\infty \ (\text{流出，自然}).$$

§62 非齐次方程 $(\lambda-D_mD_s^+)g=f$ $(\lambda>0)$ 的解

上节中求出的齐次方程的解 u 是正的、下降的，而且在 r_2 上，u 和 D_s^+u 都有有限的极限值。把它記为 $u_2(x)=u_2(x;\lambda)$. 同理，正的上升解：$u_1(x)=u_1(x;\lambda)$ 也存在，而且在 r_1 上有同样的极限值。

如上节所述，$W=W(u_1, u_2)$ 是常数，若考虑 $W(0)$，就知 $W>0$，故如以适当的正因子乘 u_1，就可使 $W=1$.

若令

$$K(x, y)=K(x, y; \lambda)=\begin{cases}u_1(x)u_2(y), & r_1<x\leqslant y<r_2,\\ u_2(x)u_1(y), & r_1<y\leqslant x<r_2,\end{cases}$$

则 K 关于二变数 x, y 为連續且对称。又 $K\geqslant 0$ 是显然的。

其次，为求非齐次方程

$$(\lambda-D_mD_s^+)g=f \quad (\lambda>0) \tag{62.1}$$

的特解 g_0，設

$$g_0(x)=K\cdot f(x)=\int_{r_1}^{r_2}K(x,y)f(y)dm(y).$$

此处假定 f 有界、連續，$g_0(x)$ 有意义（即上述积分是确定的），而且 $g_0(x)$ 关于 x 的連續性可由次式看出：

$$\begin{aligned}g_0(x)&=u_2(x)\int_{r_1}^{x+0}f(y)u_1(y)dm(y)\\&\quad+u_1(x)\int_{x+0}^{r_2}f(y)u_2(y)dm(y)\\&=\frac{u_2(x)}{\lambda}\int_{r_1}^{x+0}f(y)du_1^+(y)+\frac{u_1(x)}{\lambda}\int_{x+0}^{r_2}f(y)du_2^+(y).\end{aligned}$$

此处 u^+ 表 D_s^+u.

旣然，积分算子 K 的意义已經确定，它显然是正的，而且是綫性的。

其次，为了証明 g_0 满足 (62.1)，利用上节的引理 61.1，就得

$$\begin{aligned}dg_0&=du_2\int_{r_1}^{x+0}f(y)u_1(y)dm(y)+u_2(x)f(x)u_1(x)dm\\&\quad+du_1\int_{x+0}^{r_2}f(y)u_2(y)dm(y)-u_1(x)f(x)u_2(x)dm\\&=du_2\int_{r_1}^{x+0}f(y)u_1(y)dm(y)+du_1\int_{x+0}^{r_2}f(y)u_2(y)dm(y),\end{aligned}$$

$$D_s^+g_0=D_s^+u_2\int_{r_1}^{x+0}f(y)u_1(y)dm(y)+D_s^+u_1\int_{x+0}^{r_2}f(y)u_2(y)dm(y).$$

再一次进行同样的計算，并利用 $\lambda u_i=D_mD_s^+u_i$ 就得

$$D_mD_s^+g_0=\lambda g_0-f.$$

r_1，r_2 中之一或二者为正则边界时，对应的 u_1，u_2 有无限多个，故 K 的选法有无数个，因而 g_0 也有无数个，但其中任何一个都有上述性质。

研究 g_0 在两端上的极限值，则得下面的定理，应写为 $g_0(r_2-)$ 的記为 $g_0(r_2)$，

定理1

(i)若 r_2 为正則，則 $g(r_2)=u_2(r_2)\int_{r_1}^{r_2} fu_1 dm$,

$$g^+(r_2)=u_2^+(r_2)\int_{r_1}^{r_2} fu_1 dm.$$

(ii)若 r_2 为流出，則 $g(r_2)=0$。

(iii)若 r_2 为流入，則 $g(r_2)=u_2(r_2)\int_{r_1}^{r_2} fu_1 dm$, $g^+(r_2)=0$.

(iv)若 r_2 为自然，則 $f(r_2)$ 存在时，$g(r_2)$ 也存在，且

$$g(r_2)=f(r_2)/\lambda.$$

証明 (i)是明显的，(iii)也容易証明。为証(ii)，(iv)則需要技巧。此地只証(ii)，至于(iv)可同样証明。

由于

$$|g(x)|\leqslant(K\cdot 1)(x)\sup_x|f(x)|,$$

故只要証明 $(K\cdot 1)(x)\to 0$ $(x\to r_2)$ 卽可。

$$\begin{aligned}
\lambda(K\cdot 1)(x) &= u_2(x)\int_{r_1}^{x+0} du_1^+ + u_1(x)\int_{x+0}^{r_2} du_2^+ \\
&= u_2(x)u_1^+(x) - u_2(x) - u_1^+(r_1) + u_1(x)[u_2^+(r_2)-u_2^+(x)] \\
&= u_2(x)u_1^+(x) + o(1) = u_1^+(x)\int_x^{r_2}(-u_2^+)ds + o(1) \\
&\leqslant -u_2^+(x)\int_x^{r_2} u_1^+(y)ds + o(1) \quad (\text{因为 } -u_2^+\downarrow,\ u_1^+\uparrow) \\
&= -u_2^+(x)(u_1(r_2)-u_1(x)) + o(1)\to 0.
\end{aligned}$$

例 設 $I=(-\infty,\infty)$, $D_m D_s^+=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$. 則$-\infty,\infty$都是自然边界，故 u_1, u_2 除常数因子外唯一确定。解

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}u_i=\lambda u_i,\quad u_i>0,\quad u_1\uparrow,\ u_2\downarrow,$$

而得

$$u_1=e^{\sqrt{2\lambda}x},\quad u_2=e^{-\sqrt{2\lambda}x}.$$

因为 $W(u_1, u_2)=2\sqrt{2\lambda}$，故若以 $u_1/2\sqrt{2\lambda}$ 代替 u_1，則得 $W=1$，故有

$$K=\frac{1}{2\sqrt{2\lambda}}e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|}.$$

因为 $s=x$, $m=2x$，故

$$Kf=\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|}f(y)dy.$$

§63 $x^{(a)}(t)$ 諸量在正則区間上的分布

至今为止，只研究了 Feller 算子 $D_mD_s^+$ 的解析性質，現在再来研究原来的問題。令 $x^{(a)}(t)$ 为在紧致的(compact)距离空間 R 上变动的 Markoff 过程，令 R 的开集 I 为正則区間。也就是說，令 I 与实数区間 (r_1, r_2) 同胚，I 的各点不仅是扩散点，而且还是正則点。前已說过，在 I 上存在标准尺度 s 和标准測度 dm，使

$$A_I=(D_mD_s^+)_I. \tag{63.1}$$

象以前一样，把 I 的点与 (r_1, r_2) 的点同样看待。以 $P_I(t, \xi, E)$ 表从 I 的点 ξ 出发未跑出 I 而經 t 时后到达 E 的概率。若令 $\tau_I^{(\xi)}$ 为 $x^{(\xi)}(t)$ 跑出 I 的最初时間，則

$$P_I(t, \xi, E)=p\{x^{(\xi)}(t)\in E,\ \tau_I^{(\xi)}>t\}. \tag{63.2}$$

当 $\tau_I^{(\xi)}<\infty$ 时，$x^{(\xi)}(\tau_I^{(\xi)})$ 不屬于 I 本身，而屬于 I 在 R 中的边界点上，但对任意 $\delta>0$，$x^{(\xi)}(\tau_I^{(\xi)}-\delta)$ 則屬于 I，而且由于 $x^{(\xi)}(t)$ 的样本过程連續，故 $x^{(\xi)}(\tau_I^{(\xi)}-0)$ 确定而且等于 r_1 或 r_2. 令 $\tau_1^{(\xi)}=\tau_1^{(\xi)}(I)$，在 $\tau_I^{(\xi)}<\infty$ 并且 $x^{(\xi)}(\tau_I^{(\xi)}-0)=r_1$ 时等于 $\tau_I^{(\xi)}$，在其他情形則等于 ∞。同样利用 r_2 来定义 $\tau_2^{(\xi)}=\tau_2^{(\xi)}(I)$. $\tau_i^{(\xi)}$ 就是 $x^{(\xi)}(t)$ 从 r_i 这边跑出 I 的时間。$\tau_i^{(\xi)}$ 的分布記为 $\varphi_i(dt, \xi)$.

不求 $P_I(t, x, E)$，$\varphi_i(dt, \xi)$ 而計算它們的 Laplace 变换

$$R_I(\lambda, x, E)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_I(t, x, E)dt, \tag{63.3}$$

$$\hat{\varphi}_{i\lambda}(\xi)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi_i(dt,\xi). \tag{63.4}$$

本节的目的就是說明下面的一些定理。

定理 1 利用上节的 $u_{i\lambda}(\xi)$，$i=1, 2$，及 K_λ 就得

$$R_I(\lambda, x, E)=\int_E K_\lambda(x, y)m(dy), \tag{63.5}$$

$$\hat{\varphi}_{1\lambda}(\xi)=\frac{u_{2\lambda}(\xi)}{u_{2\lambda}(r_1)},\quad \hat{\varphi}_{2\lambda}(\xi)=\frac{u_{1\lambda}(\xi)}{u_{1\lambda}(r_2)}. \tag{63.6}$$

但若 r_i 为正则边界时，$u_{i\lambda}(\xi)$ 应取为 $\underline{u}_{i\lambda}(\xi)$，即 $u_{i\lambda}(v_i)=0$ 的解，而 $K_\lambda(x, y)$ 则由此等解构成。

在(63.6)中，譬如，$u_{2\lambda}(r_1)=\infty$，則 $\hat{\varphi}_{1\lambda}(\xi)=0$，即 $P(\tau_1^{(\xi)}=\infty)=1$，这表示不能达到 r_1. 若 $u_{2\lambda}(r_1)<\infty$，則 $\hat{\varphi}_{1\lambda}(\xi)>0$，且 $P(\tau_1^{(\xi)}<\infty)>0$，而表示有到达 r_1 的可能性。因此得

定理 2 在有限时間內可能到达正則边界与流出边界，但在有限时間內不能到达流入边界和自然边界。

今証定理 1. 先在 I 內取区間 $J=(j_1, j_2)(\bar{J}\subset I)$，而对 J 証明定理。对 J 采用 $R_J(\lambda, x, E)$，$K_\lambda(x, y; J)$，$\varphi_i(dt, \xi, J)$，$\hat{\varphi}_{i\lambda}(\xi; J)$，$u_{i\lambda}(\xi; J)$ 等記号。如前一样，利用强 Markoff 性，对 $f\in C(R)$ 得

$$R_\lambda f(x)=R_{J\lambda}f(x)+\sum_{i=1}^{2}\hat{\varphi}_{i\lambda}(x, J)R_\lambda f(j_i). \tag{63.7}$$

因为 $\hat{\varphi}_{1\lambda}(x, J)$ 是 $(\lambda-A_J)u=0$，$u(j_1)=1$，$u(j_2)=0$ 的解，故由 $A_J=(D_m D_s^+)_J$ 得

$$\hat{\varphi}_{1\lambda}(x, J)=\frac{u_{2\lambda}(\xi; J)}{u_{2\lambda}(j_1; J)}. \tag{63.8}$$

同理

$$\hat{\varphi}_{2\lambda}(x, J)=\frac{u_{1\lambda}(\xi; J)}{u_{1\lambda}(j_2; J)}. \tag{63.9}$$

因而

$$R_\lambda f(x)=R_{J\lambda}f(x)+u_{1\lambda}(\xi;J)\frac{R_\lambda f(j_2)}{u_{1\lambda}(j_2;J)}$$

$$+u_{2\lambda}(\xi;J)\frac{R_\lambda f(j_1)}{u_{2\lambda}(j_1;J)}. \tag{63.10}$$

另方面,又因 $R_\lambda f$ 满足 $(\lambda-A)R_\lambda f=f$, 显然在 J 内有 $(\lambda-A_J)R_\lambda f=f$. 由 $A_J=(D_mD_s^+)_J$ 且用前节的結果,就有

$$R_\lambda f(x)=K_{\lambda J}f(x)+c_1u_{1\lambda}(x;J)+c_2u_{2\lambda}(x;J),\quad x\in J,$$

因为 J 的两端是正則边界,故

$$K_{\lambda J}f(j_i)=0,\quad u_{i\lambda}(j_i;J)=0,\quad i=1,2,$$

因而

$$c_1=\frac{R_\lambda f(j_2)}{u_{1\lambda}(j_2;J)},\quad c_2=\frac{R_\lambda f(j_1)}{u_{2\lambda}(j_1;J)}.$$

故

$$R_\lambda f(x)=K_{\lambda J}f(x)+\frac{R_\lambda f(j_2)}{u_{1\lambda}(j_2;J)}u_{1\lambda}(x;J)$$

$$+\frac{R_\lambda f(j_1)}{u_{2\lambda}(j_1;J)}u_{2\lambda}(x;J). \tag{63.11}$$

比較(63.10)与(63.11)得

$$R_{J\lambda}f(x)=K_{\lambda J}f(x),\quad x\in J, \tag{63.12}$$

因任意在 $\bar{J}$ 上連續的函数都可推广为 R 全体上的連續函数,故(63.12)对所有的 $f\in \boldsymbol{C}(J)$ 成立,因此得

$$R_J(\lambda;x,dy)=K_J(\lambda,x,y)dm(y)$$

$$=\begin{cases}u_{1\lambda}(x;J)u_{2\lambda}(y;J)dm(y), & j_1\leqslant x\leqslant y\leqslant j_2,\\ u_{2\lambda}(x;J)u_{1\lambda}(y;J)dm(y), & j_1\leqslant y\leqslant x\leqslant j_2.\end{cases}$$

若令 $J\uparrow I$, 則 $\tau_J^{(\xi)}\uparrow\tau_I^{(\xi)}$, 而且由

$$R_{J\lambda}f(\xi)=E\left\{\int_0^{\tau_J^{(\xi)}}e^{-\lambda t}f(x(t))dt\right\},$$

故 $R_{J\lambda}f(\xi)\to R_{I\lambda}f(\xi)$, $u_{1\lambda}(x;J)$, $u_{2\lambda}(x;J)$ 的选擇虽只有常数因子的自由度,但当 $J\uparrow I$ 时,可以分別使之接近于 $u_{1\lambda}(x)$ 和 $u_{2\lambda}(x)$, 因此, $K_{\lambda J}f(\xi)\to K_\lambda f(\xi)$, 并得 $R_{I\lambda}=K_{\lambda I}$, 故得 (63.5). 至于

$\hat{\varphi}_{I\lambda}(\xi)$，当 $J\uparrow I$ 时，先令 $j_2\uparrow r_2$，其次令 $j_1\downarrow r_1$，则易由(63.8~63.9)推出(63.6)。

§64 在正则区間的边界上的行动

采用上节的記号。因为 I 与 (r_1, r_2) 同胚，故对于无論多么接近于 r_1 的实数，都有对应的 I 点，但对 r_1 本身就沒有对应的点。若 $\tau_I^{(f)}$ 有限，则 $x(\tau_I^{(f)})$ 是 I 在 R 的边界点。若令 b 为 I 的边界上的一点，则存在逼近于 b 的 I 的点列 b_n。对应于 b_n 的实数（b_n 的坐标）叙列以 r_1, r_2 中之一或二者作为极限点。因此可以假定以二者之一作为极限点。若 b_n 以 r_i 作为极限点，就說"b 对应于 r_i"。一点 b 可能对应于 r_1，r_2 双方，又不同的 b 与 b' 也可能对应于同一 r_i。后者仅当 r_i 是自然边界时才有可能（見本节定理 1）。今若令 b 与 b' 对应于 r_1，则得 $b_n\to b$，$b'_n\to b'$，$\bar{b}_n$（b_n 的坐标）$\to r_1$，$\bar{b}'_n\to r_1$。如前节所述，在 I 内有

$$R_\lambda f=K_\lambda f+c_1u_1+c_2u_2.$$

当 r_1 为流入时，则 $u_2(r_1+)=\infty$，故为使上式成立就要 $c_2=0$。因为 $K_\lambda f(r_1+)$ 存在，而且 $u_1(r_1+)=0$，所以

$$R_\lambda f(b)=\lim_n R_\lambda f(b_n)=\lim_n K_\lambda f(\bar{b}_n)=K_\lambda f(r_1+).$$

同理，$R_\lambda f(b')=K_\lambda f(r_1+)=R_\lambda f(b)$。由 $\lambda R_\lambda f\to f$，得 $f(b')=f(b)$。因为 f 是 $C(R)$ 中任意的元，故得 $b=b'$。又 r_1 为流出或正则时，$u_2(r_1+)$ 也有限地确定，故如上一样得 $b=b'$。从而有

定理 1 若 r_i 不是自然边界，则对应于 r_i 的 I 的边界点只有一个。

（i）研究 $x^{(a)}(t)$ 在对应于自然边界的边界点上的行动。令 r_1 为自然边界，那么与此对应的边界点一般地有許多个，并且构成 R 的閉子集 F。又从 F 出发的 $x^{(a)}(t)$ 恒被关閉在 F 内。为此，考虑在 F 的邻域 U 上为 0 的 R 上的連續函数 f，则 f 在 I 上的

r_1 的邻域上为 0. 故 $f(r_1-)$ 存在而且当然为 0，于是 $R_\lambda f(r_1-)=f(r_1-)/\lambda=0$. 因而得 $R_\lambda f(a)=0$, $a\in F$. 今若取 f 在 F 上为 0，在 U 外为 1，在 $U-F$ 上則位于 0, 1 之間，則

$$R_\lambda f(a)\geqslant\int_0^\infty e^{-\lambda t}P(t,\ a,\ U^c)dt.$$

因为左边为 0，故 $P(t,a,U^C)=0$，亦即 $P(t,a,U)=1$. 令 $U\downarrow F$，就得

$$P(t,\ a,\ F)=1.$$

因为 $x^{(a)}(t)$ 連續，故

$$P(x^{(a)}(t)\in F,\quad 0\leqslant t<\infty)=1,\quad a\in F.$$

特別，若 F 是一点，則此点就是套点。一般从 I 的点出发，在有限时間內不可能到达 F.

(ii) 流出边界上的状态。令 r_1 为流出边界。因为对应于 r_1 的边界仅有一个，故也用 r_1 表示。若取 r_1 的邻域 U 而且考虑其边界，則得 I 內的一点 r_1' 及不在 I 中的閉集 C. 从 U 中的一点 a 出发，在到达 C 以前先到达 r_1' 的时間令为 $\tau^{(a)}$，若这种情况不发生，則令 $\tau^{(a)}=\infty$. 令

$$U(a)=E\{e^{-\lambda\tau^{(a)}}\},$$

若 a 处于 $(r_1,\ r_1')$ 內，則

$$(\lambda-D_mD_s^+)U=0,$$
$$U(r_1')=1.$$

若 $r_1\leqslant x<y<r_1'$，則 $\qquad U(x)\leqslant U(y).$

故得

$$U(r_1)\leqslant U(x)=\frac{u_{1\lambda}(x)}{u_{1\lambda}(r_1')}\qquad(r_1\leqslant x<r_1').$$

若 r_1 为流出边界，則 $u_{1\lambda}(x)\to0\ \ (x\to r_1)$. 故得 $U(r_1)=0$. 这表示若从 r_1 出发，則不能自 r_1 这边进入 I 內。如前所述，从 I 这边到达 r_1 是可能的。这就是所以称 r_1 为流出边界的理由。

(iii) 考虑流入边界。早已看到从 I 这边不能到达流入边界。

对应于流入边界 r_1 的 I 在 R 上的边界点只有一个，也以 r_1 表示。若 r_1 在 R 内为 $x^{(a)}(t)$ 的扩散点，则自 r_1 出发立即进入 I，然后从 I 这边就不能到达 r_1. 这就是所以称为流入边界的原因。

首先証明 r_1 不是套点。取在 R 上的連續函数 f，令 $f\geqslant 0$，$f(r_1)=0$，$f(r_2')=1$ (r_2' 是 I 内的一点)。当 $r_1<a<r_2'$ 时，

$$R_\lambda f(a)\geqslant\hat{\varphi}_{2\lambda}(a)R_\lambda f(r_2').$$

这里 $\hat{\varphi}_{2\lambda}(a)$ 是对区間 (r_1, r_2') 而取的。故它等于 $u_{1\lambda}(r_2')/u_{1\lambda}(a)$，而且当 $a\to r_1$ 时逼近于 $u_{1\lambda}(r_2')/u_{1\lambda}(r_1)$. 故得

$$R_\lambda f(r_1)\geqslant\frac{u_{1\lambda}(r_2')}{u_{1\lambda}(r_1)}\cdot R_\lambda f(r_2').$$

若 r_1 是套点，则左边等于 $f(r_1)/\lambda=0$，但由 $\lambda R_\lambda f(r_2')\to f(r_2')=1$ 可以推知，对足够大的 λ 右边是正的。于是得出矛盾，故 r_1 不是套点。进一步还可証明从 r_1 出发一定立即进入 I 内，但因証明复杂，故从略。由此可知 r_1 是一般右通过点。

今研究在 r_1 上的生成算子。取 r_1 的充分小的邻域 U，使 $p_U(\xi)=E(\tau_U^{(\xi)})<\infty$. 若以 $\tau(\xi)$ 表从 r_1 到达 ξ 的最初时間，则因 r_1 是通过点，故要跑出 U，就必須通过 ξ，因而 $\tau(\xi)<\tau_U^{(r_1)}$. 若令 $p(\xi)=E(\tau(\xi))$，则

$$p_U(r_1)=p(\xi)+p_U(\xi).$$

但由 Dynkin 定理，

$$A_J p_U(\xi)=-1\quad(J=I\cap U).$$

故 $A_J p_U(\xi)=1$. 亦即 $D_m D_s^+ p(\xi)=1$. 由此得

$$p(\xi)=\int_{\xi_0}^{\xi}m(x)\,ds(x)+as(\xi)+b.$$

此处 ξ_0 是比 ξ 小的任意常数。若取 $\xi_0=0$，则上面的积分发散，因而不方便。a, b 与 ξ_0 有关，只有在 $\xi>\xi_0$ 时上式才妥当。将上式变形为

$$p(\xi)=\int_{r_1}^{\xi}(s(\xi)-s(x))dm(x)+cs(\xi)+d,$$

則它不含 ξ_0，而且恒成立。因为 $p(r_1)=0$，故不得不有 $c=d=0$（注意 $s(r_1)=-\infty$）．于是得

$$p(\xi)=\int_{r_1}^{\xi}(s(\xi)-s(x))dm(x).$$

因而由 § 56 的定理 1，

$$A_{r_1}f=\lim_{\xi\downarrow r_1}\frac{f(\xi)-f(r_1)}{\int_{r_1}^{\xi}(s(\xi)-s(x))dm(x)}.$$

(iv) 在正則边界 r_1 上的行动有好几种不同的可能性，它相应于在正則边界上选擇 $u_{1\lambda}(x)$ 的多样性。这里考虑这样的情况：r_1 在 R 内也是端点，而且 r_1 的邻域只是 r_1 或只是 I 的点。这时 r_1 或者是套点，或者是一般右通过点。若是套点，則 $R_\lambda f(r_1)=f(r_1)/\lambda$，故

$$R_\lambda f(x)=K_\lambda f(x)+\frac{u_{2\lambda}(x)}{u_{2\lambda}(r_1)}\cdot\frac{f(r_1)}{\lambda}+\frac{u_{1\lambda}(x)}{u_{1\lambda}(r_2)}\cdot R_\lambda f(r_2).$$

若是一般右通过点，則与 (iii) 同样求 $p(\xi)$ 而得

$$p(\xi)=\int_{r_1}^{\xi}(m(x)+c)ds(x).$$

因为 $m(x)$ 的决定有一附加常数的选擇自由，故可令 $c=0$ 以使

$$p(\xi)=\int_{r_1}^{\xi}m(x)ds(x).$$

因为 $p(\xi)\uparrow$，故 $m(x)>0$．也就是

$$m(r_1)\geqslant 0,$$

而且

$$A_{r_1}f=\lim_{\xi\downarrow r_1}\frac{f(\xi)-f(r_1)}{\int_{r_1}^{\xi}m(x)ds(x)}.$$

若 f 不但属于 $\mathfrak{D}(A_{r_1})$，而且属于 $\mathfrak{D}(A_U)$，这里 U 是 r_1 的邻域，則

$\xi > r_1$，而且 $f \in \mathfrak{D}((D_m D_s^+)_J)$，$J = U \cap I$. 故得

$$A_J f(r_1) = \lim_{\xi \downarrow r_1} \frac{D_s^+ f(\xi)}{m(\xi)}.$$

若 $m(r_1) = 0$，则

$$D_s^+ f(r_1) = 0.$$

这叫做反射壁(reflecting barrier)的边界条件。

若 $m(r_1) > 0$，则由 $A_J f(x)$ 的連續性得

$$\frac{D_s^+ f(r_1)}{m(r_1)} = D_m D_s^+ f(r_1).$$

这叫做普遍化了的反射壁的边界条件，是由 Feller 最先引进的。

若考察上述边界条件的概率意义，则会发現許多有趣的問題。

后　　記

現在列举閱讀本书的参考讀物如下:

A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. der Math., Berlin, 1933❶.

W. Feller: An introduction to probability theory and its application, lst ed. 1950; 2nd ed. 1957.

J. L. Doob: Stochastic processes, 1952.

P. Lévy [1]: Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937.

[2]: Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, 1948.

河田敬义: 确率論,共立出版, 1948.

国澤清典: 近代确率論,岩波全书,岩波书店, 1951.

伊藤　清: 确率論,現代数学,岩波书店, 1952.

丸山仪四郎: 确率論,現代数学講座,共立社, 1957.

对本书各章附加說明如下:

第1章　这一章叙述了概率論的基本概念。要把概率論构成为一門数学,最适合的方法是 Kolmogoroff 的测度方法。本书就是根据这个观点叙述的。但是要善于在实际問題中加以应用,那就必須充分理解其直观背景。从这个角度来看,上列 Feller 的书值得推薦。

对于 Kolmogoroff 的测度方法的基本概念, Kolmogoroff 的书和上列河田敬义的书都可参考。由于这两本书都沒有詳細地論及随机过程的样本过程,为此有必要导入 Doob 的可分性。Doob 原先发表的論文,观点稍为不彻底,而且晦涩难讀,但上列 Doob 的书已經过整理,有詳尽的闡述。

第2章　本章着重討論时間参数为連續的情形(可加过程)。对于参数为离散的情形(可加序列),所討論的仅限于研究可加过程所需要的范圍之內,例如大数法則,中心极限定理,重对数定理等都省略,关于这方面,可参考上述国澤清典的书。另外,鈡开萊(K. L. Chung)由俄文原本譯成英文的

❶ 有中譯本:概率論基本概念,丁寿田譯,商务印书館。——校者注

下列书中也有很好的闡述。

Gnedenko-Kolmogoroff: Limit distribution for sums of independent random variables (Moscow-Leningrad, 1949)❶.

对于可加过程，上列 P. Lévy 的[1]和[2]內容最为丰富。但是讀起来相当困难；其中的基本部分，在上列 Doob 及伊藤清的书內，都根据 Kolmogoroff 的观点进行了整理，比較容易理解。

第3章 本章叙述了平稳过程的基本事項，不过略去了 Wiener-Kolmogoroff 內插，外推，以及 Grenander 的参数估計等项目。这将在本丛书的河田龙夫著"确率过程的应用"中闡述，参考文献有

上列 Doob 书的12章。

N. Wiener: Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, 1949.

A. Kolmogoroff: Interpolation und Extrapolation in stationären Zufälligen Folgen, Bull. Acad. Sci. U. S. S. R. Ser. Math., **5**, 1941.

U. Grenander: Stochastic processes and statistical inference, Arkiv. för Mat., **1**, 1950.

另外，对于本章提到而不加以証明的調和分析，可参看

N. Wiener: Generalized harmonic analysis, Acta. Math., **55**, 1930.

第4章及第5章 这两章的主題限制于对时間为齐次的 Markoff 过程，并簡称为 Markoff 过程，理由是仅有这种情形才有完整的理論，但这里也并未罗列所有的項目。第4章仅講一些基本的結果，第5章关于扩散，添上 Dynkin 方法，介紹了 Feller 的最新理論。至于 Markoff 过程的遍历(ergodic)性，由于已經有了很多的研究，受到篇幅上的限制只好割爱。

記載古典結果的文献有

M. Fréchet: Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités, second livre, methode des functions arbitraires, théorie des événement en chain dans le cas d'un nombre fini d'états possibles, Paris, 1938.

如标題所示，这书仅講述有限个状态的 Markoff 过程。关于可数个状态的 Markoff 过程，創始期的著作是

---

❶ 有中譯本：相互独立随机变数和的极限分布，王寿仁譯，科学出版社。——校者注

P. Lévy: Systèms markoviens et stationaires. Cas dénombrable Ann. Sci. École Norm. Sup., **68**, 1951.

最近钟开莱发表了很多使这方面問題进一步精密化的研究成果。这方面的日文参考讀物以前面所說的丸山仪四郎的书为最好。

关于时間不是齐次的 Markoff 过程，也有了不少的研究，可参看上列 Feller, 伊藤清和 Doob 等人的书。作为这方面研究的开端，下列文献是值得推薦的：

A. Kolmogoroff: Analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104. (見本书的附录)

校 后 記

郑 紹 濂

随机过程論是概率論中的一个重要分支。它是在近卅年来，由于物理学、无綫电技术、力学等方面的需要而迅速发展起来的一門学科。

虽然早在1900年，法国数学家巴歇列(Bachelir)已对随机过程的理論进行过研究(Ann. de l'École norm 17, 1900, p. 21)，但是随机过程的严密理論直到1931年出現了苏联数学家柯尔莫哥洛夫(А. Н. Колмогоров)的著作[28](卽为本书的附录)之后，才开始建立。在这篇文章中，开辟了随机过程論中的一个重要方向——馬尔可夫过程的研究。1934年，苏联的另一数学家欣欽(А. Я. Хинчин)在他的著作[21]中第一次提出随机过程論另一重要領域——平稳随机过程的严密理論，并闡述了它与具有不变測度位相空間的动力学系統的联系。其后，有不少的数学家在随机过程論的各个領域中进行了大量的工作。在今天来說，不仅是随机过程的理論可算是近代发展得最快的数学分支之一，而且它的应用范圍几乎已涉及到一切的自然科学与工程技术領域。特別，它已成为研究現代物理、自动控制、无綫电技术等先进科学技术的有力工具了。

日本数学家伊藤清著的"随机过程"一书，是一本具有較高理論水平的著作。作者以簡练的方法介紹了随机过程的基本理論，对于数学基础較好的讀者来說，通过这一本书，可以較快地掌握构成随机过程論的几个主要方面的思想与方法，而打下較好的理論基础。

本书的內容共分四个部分。第一部分(即本书的第1章)介紹了柯尔莫哥洛夫关于随机过程的基本理論;第二部分(即本书的第2章)介紹了可加过程的一些基本結果,着重討論了可加过程样本函数的性质,并导出了无穷可分分布律的典型表示式;在第三部分中(即本书的第3章),作者以泛函分析为工具,介紹了平稳随机过程的譜分解理論与遍历理論,同时,对于由作者本人所首先研究的平稳广义过程也作了扼要的介紹;最后一部分(即本书的第4,5两章),也是本书写得最精彩的部分,作者对研究馬尔可夫过程方面的最新方法,即半群的方法,作了透彻的介紹。由于作者的精心处理,虽然这一部分所占的篇幅不多,但对問題作了本质上的闡明。

这本书虽然具有較高的学术水平,但作为一本随机过程基本理論方面的著作来看,还是有一些缺陷的。这首先是对于一些在应用上与理論上都很重要的內容,如关于平稳过程的預測理論,馬尔可夫过程的遍历性理論等,作者有意識的将它們捨弃了。其次,在全书各个重要理論的陈述上,作者采用的是純粹的邏輯推理的方法,对于这些理論与实际的联系注意得不够,如随机游动与质点的勃朗运动的联系,平稳广义过程与勃朗运动中质点的速度、电子学中的白噪声等的联系等等(而这些联系正是需要建立平稳广义过程理論的主要的物理依据)。同时,由于缺少直观的說明,使得有些概念(如第3,4两章的开头部分),对初学的人来說难于接受。最后,就本书所举出的参考文献相对于本书所包含的丰富內容来說,显得太少了,这会給讀者带来許多的不便。

总的来說,这本书的翻譯出版,对于我国广大的讀者来說是有所裨益的。

为了使讀者便于查閱和深究本书的有关內容,对于本书的后記作如下的补充恐怕是有益的。

閱讀本书所需的有关概率論知識，可在复旦大学数学系主編的“概率論与数理統計”(上海科技出版社出版)一书中找到。

对于本书要用到的有关測度論的知識，讀者可参看 Paul R. Halmos 著的“測度論”(王建华譯,科学出版社出版)。在本书第3, 4, 5章需用到的关于泛函分析方面的知識，可参看关肇直編著的“泛函分析讲义”(高等教育出版社出版)。第3章引用的广义函数論的知識,除95頁上关于推广的 Bochner 定理(这个定理的出处已在注脚中注明)而外,都可在馮康的著作[6]中找到。

第2章：§ 17 中对依概率連續的可加过程的样本函数性质的討論,可参看 J. R. Kinney 的著作[27]。对 § 16，还可参看 Ю. В. Прохоров[30] 与 А. В. Скороход[31] 等人有关对应于可加过程的概率測度的极限理論。

第3章：从泛函分析的观点对平稳过程作系統介紹的著作，当参数为离散时，可参看 А. Н. Колмогоров 的著作[29]，当参数为連續时，可参看 K. Karhunen 的著作[24][25]。还可参看 А. М. Яглом 对平稳过程理論所做的一个較系統而又初等的介紹[23]。对 § 24 中提到的平稳广义过程，可参看本书作者的論文[22] 及 И. М. Гельфанд[18]、K. Urbanik[34]、郑紹濂[7][8] 等人的著作。关于 § 31 中所提到的多維平稳过程，最近有了較多的发展，可参看 N. Wiener 与 P. Masani 的著作[35] 及 Ю. А. Розанов 的著作[32]。对于本节中提到的齐次随机場的理論，可参見江澤培的著作[4]。

对于平稳过程的統計理論有兴趣的同志，除了可参看本书后記中提到的文献外，尙可参看 Ulf. Grenandar 与 M. Rosenblatt 的著作[19]。我国的数学工作者近几年来在平稳过程(包括多維平稳过程及齐次随机場)的回归系数的估計方面也进行了一定的工作，这可参看王寿仁[3]、江澤培[5]、郑紹濂与陶宗英[9]等人的著作。

第4章❶: §43,可参看 E. Б. Дынкин 与 A. A. Юшкевич[12], A. A. Юшкевич[33] 及 R. M. Blumenthal[10] 等人的著作。§45, 可参看 E. Б. Дынкин 的著作[13]。§48, 可参看 S. Karlin 与 J. McGregor[26] 和王梓坤[1][2] 等人的著作。

第5章: §51 可参看W. Feller 的著作[15], §52 可参看 E. Б. Дынкин 的著作[14], §53, 可参看 E. Б. Дынкин[13] 和 W. Feller[16] 的著作。§57 可参考 D. A. Darling 与 A. J. Siegert[11] 和 P. З. Хасьминский[20] 的著作, §59, 可参考 W. Feller[17] 和 E. Б. Дынкин[14]的著作及在此二文中提到的参考文献。

为了帮助讀者閱讀本书,我們作了一些必要的注解(部分注解参照了本书俄譯本的譯者注)。同时为了便于讀者查考,我們将柯尔莫哥洛夫关于馬尔可夫过程的經典著作[28] 譯成了中文,作为本书的附录。

参 考 文 献

[1] 王梓坤: 一个生灭过程,科学記录,新輯, 8(3), 1959, 266~268.

[2] 王梓坤(Ван Цзы-кун): Классификация всех процессов размножения и гибели, Научные Доклады Высшей Школы, Физ-матем., 4, 1958, 19~25.

[3] 王寿仁: 格子点上随机場的回归系数的估計問題, 数学学报, 2(8), 1958, 210~222.

[4] 江澤培(Цзян Цзэ-пей): О линейной экстраполяции непрерывного однородного случайного поля, Теор. Вероятн. и ее Прим., 1(2), 1957, 60~91.

[5] 江澤培(Chiang Tse-pei): On the estimation of regression coefficients of a continuous parameter time series with a stationary residaul, Теор. Вероятн. и ее Прим.; 4(4), 1958, 405~423.

[6] 馮 康: 广义函数論,数学进展, 3(1), 1955, 405~590.

[7] 郑紹濂: 正則与奇异的平稳广义随机过程, 科学記录, 新輯, 8(3),

❶ 第4,5两章的参考文献是由王梓坤同志提供的。

1959, 281～286.

[8] 郑紹濂：多維平稳广义随机过程的譜分析，复旦大学学报，2, 1960, 203～210.

[9] 郑紹濂、陶宗英等：具有多維平稳随机扰动的回归系数的估計，即将发表。

[10] R. M. Blumenthal: An extended Markov property, Trans. Amer. Math. Soc., 1, 1957, 85.

[11] D. A. Darling; A. J. Siegert: Ann. Math. Stat., 24, 1953, 624.

[12] Е. Б. Дынкин; А. А. Юшкевич: Строго Марковские процессы, Теор. Вероятн. и ее Прим., 1(1), 1956, 149～154.

[13] Е. Б. Дынкин: Инфинитезимальные Операторы Марковских процессов, Теор. Вероятн. и ее Прим., 1(1), 1956, 38～60.

[14] Е. Б. Дынкин: Одномерные непрерывные строго Марковские процессы, Теор. Вероятн. и ее Прим., 1(4), 1959, 3～54.

[15] W. Feller: On differential operators and boundary conditions, Communication on Pure and Applied Math., 8, 1955, 203～216.

[16] W. Feller: The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension, Ann. of Math., 3(60), 1954, 417～436.

[17] W. Feller: Diffusion processes in one dimension, Trans. Amer. Math. Soc., 77, 1954, 1～31.

[18] И. М. Гельфанд: Обобщенные случайные процессы, ДАН СССР, 5(100), 1955, 852～856.

[19] U. Grenander and M. Rosenblatt: Statistical Analysis of Stationary time Series, Wiley, 1957.

[20] Р. З. Хасьминский: Распределение вероятностей для функционалов от траектории случайного процесса диффузионного типа, ДАН СССР, 1(104), 1955, 22～25.

[21] А. Я. Хинчин: Теория корреляции стационарных стохастических процессов, УМН 5, 1938, 42 或 Math. Ann., 109, 1934, 604～615.

[22] K. Itô: Stationary random distributions, Mem. of the Coll. of Sci. Kyoto Univ., Ser. A, 3(28), 1954, 209～223.

[23] А. М. Яглом: 平稳随机函数导論(梁之舜譯), 数学进展, 1(1), 1956.

[24] K. Karhunen: Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, I. Math.-Physica, 37, 1947.

[25] K. Karhunen: Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen, Ark. Mat. 1, 1949, 141～160.

[26] S. Karlin; J. McGregor: The classification of birth and death processes, Trans. Amer. Math. Soc., 86, 1957, 366～400.

[27] J. R. Kinney: Continuity properties of sample functions of Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc., 74, 1953.

[28] A. Kolmogoroff: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104, 1931, 415～458.

[29] А. Н. Колмогоров: Стационарных последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ 2(6), 1941, 1～40.

[30] Ю. В. Прохоров: Сходимость случаиных процессов и предельные теоримы теории вероятностей, Теор. Вероятн. и ее Прим., 2 (1), 1956, 177～238.

[31] А. В. Скороход: Предельные теоримы для случайных процессов с независимыми приращениями, Теор. Вероятн. и ее Прим., 2(2), 1957, 145～177.

[32] Ю. А. Розанов: Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, УМН, XIII, 2(80), 1958, 93～142.

[33] А. А. Юшкевич: О строго Марковских процессах, Теор. Вероятн. и ее Прим., 2(2), 1957, 187～217.

[34] K. Urbanik: Generalized stochastic processes, Studia Math., XVI (1), 1958, 264～334.

[35] N. Wiener; P. Masani: The prediction theory of multivariate stochastic processes, I, Acta Math., 98, 1957; II, Acta Math., 99, 1958, 93～137.

附录　概率論的解析方法[1]

柯尔莫哥洛夫 著　　郑紹濂 譯

对于一个物理过程(物理体系的改变)，若能从它在 t_0 时的状态 X_0 的知識推得在 $t>t_0$ 时的可能状态 X 的概率分布，这个过程我們称为随机过程。

作者系統地考虑了随机过程最簡单的場合，首先是那些对于时間是連續的(于此，方法上有眞正新穎之处；以前的随机过程經常是作为离散事件序列来考虑的)場合。

若体系的可能不同状态成一有限集，則随机过程可用綫性常微分方程来确定(§3)。若体系要用一个或几个参数来决定，則就要用拋物型偏微分方程来規定它了(§5)，由此可得出各别的分布函数，其中以 Laplace 的正态分布为最簡单、最自然。

§1 引　言

I

要数学地来处理自然事件或社会事件，首先必須把这些事件概型化；这就是說，如果对一个体系的改变过程要用数学分析来考虑，那就一定要假定該体系的每一可能状态都要能用确定的数学工具完整地描述出来，即用一定个数的参数把它完整地描述出来。这样經过数学工具处理后的体系，并不是实际的本身，而是作为描述实际的一个概型。

古典力学就用了这样的一个概型法；即体系在时間 t 时的状态 y，可由前某一时間 t_0 时的状态 x 所唯一确定。它的数学表

---

[1] A. Kolmogoroff: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104, 1931, 415～458.

示为

$$y=f(x, t_0, t).$$

若这样的一个单值函数 f 存在，则就叫这个概型为一个**必然过程概型**。若某体系的状态 y 并不由时間 t 时的状态 x 所完全确定，而是与 t 时以前的状态 x 的改变有关，这种过程也作为确定論。但我們通常总是設法避免对体系的前期历史的相因性，而設法推广时間 t 时的体系状态的概念，且相应地引用新的参数❶。

在古典力学之外，我們常把另一种概型与必然过程一起来考虑，就是体系在 t_0 时的状态 x 只能定出在 $t>t_0$ 时的可能状态 y 的概率。若对于任何已知 t_0, $t>t_0$ 及 x 都存在着 y 的固定概率分布函数，那末就称这种概型为一**随机过程概型**。在一般場合中，这个分布函数写成

$$P(t_0, x, t, \mathscr{E})$$

的形状，其中 $\mathscr{E}$ 表状态 y 的某一集合，P 表示在 t 时的状态 y 在集 $\mathscr{E}$ 内的概率。这里有一个困难，就是要对一切集 $\mathscr{E}$ 都規定出这种概率来，一般說是不可能的，我們怎样来克服这点和怎样严格地定义随机过程，可見 §2。

和必然过程的場合一样，我們也可以考虑这样的概型，就是 P 不仅与状态 x 有关而还与整个先期历史有关。我們也和必然过程一样用同一方法来避免前期历史的影响。

还要注意，为了处理任何实际过程而应用必然的或者随机的过程的概型时，它的可能性与該体系实际过程是必然的还是随机的問題无关。

II

通常在概率論中所研究的問題（概型），是体系在离散时間叙

❶ 这种办法的最著名的例子是一个力学体系的状态的描述不仅用点的坐标，且用速度的支量。

列 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$ 上改变时所产生的問題，Bachelir[1] 第一个系統地研究了 t 連續变化时的概率 $P(t_0, x, t, \mathscr{E})$。关于 Bachelir 所研究的場合，將在 §5 及結束語中再談，此地只指出 Bachelir 的考虑在数学上是不够严格的。

本文的 §3，主要是考虑上面所提出的連續时間的概型。就数学上来說，这有一个很大的好处，就是可以用 P 对时間的微分方程而得到簡練的公式，这种公式在通常的理論中只能作为近似式。至于应用，第一，这种新方案可直接用于实际过程；第二，从連續时間的过程的微分方程的求解可导出离散时間概型的新的漸近公式，这在 §5 中將加以說明。

III

概率論的完全公理系，在此不拟作完整的叙述，只对本文中需用到的有关部分加以說明，卽对可能状态 x 的集 $\mathfrak{A}$ 不作特殊的假定，数学上說来，$\mathfrak{A}$ 可以是任意元所成的任意集。关于集系 $\mathscr{F}$ 及函数 $P(t_0, x, t, \mathscr{E})$ 的一切假設均見 §2，全部理論是作为一种純粹数学而开展的。

§2 总　　論

1. 随机过程的一般概型

設 γ 为一体系，可处于各状态 $x, y, z, \cdots$ 之中；$\mathscr{F}$ 是状态 $x, y, z, \cdots$ 的集 $\mathscr{E}$ 所成的集系。若对于任选的状态 x_1，集 $\mathscr{E}$，二时間 t_1 及 $t_2 (t_1 < t_2)$，假定在 t_1 时状态是 x_1，而 t_2 时是 $\mathscr{E}$ 中的状态之一的概率 $P(t_1, x_1, t_2, \mathscr{E})$ 能够确定，則称体系 γ 的变化过程关

---

[1] I. Théorie de la spéculation, Ann. de I'École norm 17, 1900, p. 21.
II. Les prababilités à plusieurs variables, ibid. 27, 1910, p. 339.
III. Cacul des probabilités, 1912.

于 $\mathscr{F}$ 是随机的，若概率 $P(t_1, x_1, t_2, \mathscr{E})$ 只对于 $t_2>t_1\geqslant t_0$ 为确定，則称变化过程对 $t\geqslant t_0$ 是有定义的。

对于集系 $\mathscr{F}$，假設：第一，是加性的；第二，包含空集、全部可能状态 $x, y, z, \cdots$ 的集 $\mathfrak{A}$ 以及一切含单个元素的集 $\mathscr{E}$。若 $\mathfrak{A}$ 是有限或可列的，則 $\mathscr{F}$ 显然包含 $\mathfrak{A}$ 的所有子集，但对非可列的 $\mathfrak{A}$，則 $\mathscr{F}$ 所包含的子集須作必要的限制。

自然地可設

$$P(t_1, x, t_2, \mathfrak{A})=1, \tag{2.1}$$

且对空集 $\mathfrak{O}$ 有

$$P(t_1, x, t_2, \mathfrak{O})=0.$$

更設 $P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})$ 是集 $\mathscr{E}$ 的加性函数，即把 $\mathscr{E}$ 分成有限或可列个不相交的 $\mathscr{E}_n$ 后，有

$$\sum_n P(t_1, x, t_2, \mathscr{E}_n)=P(t_1, x, t_2, \mathscr{E}). \tag{2.2}$$

为了进一步对 $P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})$ 作重要的假設，需要函数 $f(x)$ 关于 $\mathscr{F}$ 的可测性的概念以及抽象 Stieltjes 积分的概念。我們在以后要用的时候再給出它們的定义[1]。

若任取二个实数 a 和 b，由滿足不等式 $a<f(x)<b$ 的 x 所成的集 $\mathscr{E}$ 属于集系 $\mathscr{F}$，則称函数 $f(x)$ 关于集系 $\mathscr{F}$ 为可测。不难証明，若系 $\mathscr{F}$ 为加性且 $f(x)$ 关于 $\mathscr{F}$ 为可測，則使 $f(x)$ 属于一 Borel 可測集的 x 的全体所成的集也在系 $\mathscr{F}$ 內。

現在設 $f(x)$ 关于 $\mathscr{F}$ 可測，且为有界。又設 $\varphi(\mathscr{E})$ 是在 $\mathscr{F}$ 上有定义的一个非負加性集合函数，我們知道和式

$$\sum_m \frac{m}{n}\ \varphi\left(\frac{m}{n}\leqslant f(x)<\frac{m+1}{n}\right)$$

---

[1] 关于这方面的知識，可参看 M. Fréchet: Sur l'intégrale d'une fonctionnelle elendue à un ensemble abstrait, Bull. de la Soc. Math. de France **43**, 1915, p. 248.

在$n\to\infty$时趋于一确定的极限,这个极限称为 **Stieltjes** 积分,記为

$$\int_{\mathfrak{A}_x} f(x)\varphi(d\mathfrak{A}).$$

这个記号与常用的不同之处在于积分变量。要特别指出的是，微分記号在括号之内。

以下假定$P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})$作为状态$x$的函数关于$\mathscr{F}$为可测。又$P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})$对于任何$t_1, t_2, t_3 (t_1<t_2<t_3)$满足基本方程

$$P(t_1, x, t_3, \mathscr{E})=\int_{\mathfrak{A}_y} P(t_2, y, t_3, \mathscr{E}) P(t_1, x, t_2, d\mathfrak{A}). \quad (2.3)$$

若集$\mathfrak{A}$含有有限个或可列个元$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，则

$$\int_{\mathfrak{A}_y} P(t_2, y, t_3, \mathscr{E}) P(t_1, x, t_2, d\mathfrak{A})$$
$$=\sum_n P(t_2, x_n, t_3, \mathscr{E}) P(t_1, x, t_2, x_n).$$

右边是全概率$P(t_1, x, t_3, \mathscr{E})$，故在这場合,公式(2.3)得到了証明。若$\mathfrak{A}$不是可列,则把关系式(2.3)当作一个新的公理。

以上所說的这些要求便完全决定了随机过程;任意集$\mathfrak{A}$的元$x, y, z, \cdots$，可以作为某体系的状态的記号，而满足上列要求的任意函数$P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})$可以作为相应的概率分布函数。

在$\mathscr{F}$上有定义的加性非負函数$F(\mathscr{E})$若满足方程

$$F(\mathfrak{A})=1, \quad (2.4)$$

则称为分布函数。关于$P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})$的一切要求又可以这样說：$P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})$作为$\mathscr{E}$的函数是分布函数，作为$x$的函数是对系$\mathscr{F}$可测且满足积分方程(2.3).

設在时間$t=t_0$上有一个分布函数$Q(t_0, \mathscr{E})$表示体系γ在时間t_0上所处状态属于$\mathscr{E}$的概率，要在时間$t>t_0$上規定分布函数$Q(t,\mathscr{E})$，須有第二基本方程

$$Q(t, \mathscr{E})=\int_{\mathfrak{A}_x} P(t_0, x, t, \mathscr{E}) Q(t_0, d\mathfrak{A}). \quad (2.5)$$

显然可得

$$Q(t, \mathfrak{A})=\int_{\mathfrak{A}} Q(t_0, d\,\mathfrak{A})=Q(t_0, \mathfrak{A})=1, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{A}_x} & P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})Q(t_1, d\,\mathfrak{A}) \\ &=\int_{\mathfrak{A}_x} P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})\cdot\int_{\mathfrak{A}_y'} P(t_0, y, t_1, d\,\mathfrak{A})Q(t_0, d\,\mathfrak{A}') \\ &=\int_{\mathfrak{A}_y'}\cdot\int_{\mathfrak{A}_x} P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})P(t_0, y, t_1, d\mathfrak{A})Q(t_0, d\mathfrak{A}') \\ &=\int_{\mathfrak{A}_y'} P(t_0, y, t_2, \mathscr{E})Q(t_0, d\,\mathfrak{A}')=Q(t_2, \mathscr{E}).\end{aligned} \tag{2.7}$$

我們把公式(2.5)看做是 $Q(t, \mathscr{E})$ 的定义,不当做关于体系 γ 的新的要求。还要注意,关系式(2.3)是(2.5)的一个特殊情形。

2. 算子 $F_1(x, \mathscr{E})*F_2(x, \mathscr{E})$

設 $F_1(x, \mathscr{E})$ 及 $F_2(x, \mathscr{E})$ 是二个分布函数,而作为 x 的函数看,关于体系 $\mathscr{F}$ 是可測的。設

$$\begin{aligned}F(x, \mathscr{E})&=F_1(x, \mathscr{E})*F_2(x, \mathscr{E})=F_1*F_2(x, \mathscr{E}) \\ &=\int_{\mathfrak{A}_y} F_2(y, \mathscr{E})\cdot F_1(x, d\mathfrak{A}).\end{aligned} \tag{2.8}$$

显然,$F(x, \mathscr{E})$ 满足 $F_1(x, \mathscr{E})$ 及 $F_2(x, \mathscr{E})$ 所满足的可測条件及可加性条件;同时也满足方程(2 4):

$$\begin{aligned}F(x, \mathfrak{A})&=\int_{\mathfrak{A}_y'} F_2(y, \mathfrak{A})F_1(x, d\,\mathfrak{A}')=\int_{\mathfrak{A}_y'} F_1(x, d\,\mathfrak{A}') \\ &=1.\end{aligned}$$

故 $F(x, \mathscr{E})$ 也是一分布函数。

再則,算子 F_1*F_2 满足結合律

$$F_1*(F_2*F_3)=(F_1*F_2)*F_3. \tag{2.9}$$

这可由下面的計算而得到

$$F_1*(F_2*F_3)(x,\mathscr{E})$$
$$=\int_{\mathfrak{A}_y}\int_{\mathfrak{A}_z'}F_3(z,\mathscr{E})F_2(y,d\mathfrak{A}')F_1(x,d\mathfrak{A})$$
$$=\int_{\mathfrak{A}_z'}F_3(z,\mathscr{E})\int_{\mathfrak{A}_y}F_2(y,d\mathfrak{A}')F_1(x,d\mathfrak{A})$$
$$=(F_1*F_2)*F_3(x,\mathscr{E}).$$

交换律一般是不成立的。

现在需要規定一个单位函数 $\mu(x,\mathscr{E})$，使对于任何 $F(x,\mathscr{E})$，都有

$$\mu*F(x,\mathscr{E})=F*\mu(x,\mathscr{E})=F(x,\mathscr{E}).\tag{2.10}$$

要达到此目的，設

$$\mu(x,\mathscr{E})=\begin{cases}1, & x\in\mathscr{E},\\ 0, & x\notin\mathscr{E}.\end{cases}$$

因为

$$\mu*F(x,\mathscr{E})=\int_{\mathfrak{A}_y}F(y,\mathscr{E})\mu(x,d\mathfrak{A})=F(x,\mathscr{E}),$$
$$F*\mu(x,\mathscr{E})=\int_{\mathfrak{A}_y}\mu(y,\mathscr{E})F(x,d\mathfrak{A})=\int_{\mathscr{E}}F(x,d\mathscr{E})$$
$$=F(x,\mathscr{E}).$$

至此，只对于 $t_2>t_1$ 規定了概率 $P(t_1,x,t_2,\mathscr{E})$；現設对任何 t，

$$P(t,x,t,\mathscr{E})=\mu(x,\mathscr{E}).\tag{2.11}$$

这个新定义并不与基本方程(2.3)有矛盾，因为(2.3)可写为

$$P(t_1,x,t_3,\mathscr{E})=P(t_1,x,t_2,\mathscr{E})*P(t_2,x,t_3,\mathscr{E}).\tag{2.12}$$

3. 特别場合的分类

若体系 γ 的状态变化只在时間的离散叙列

$$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots\to+\infty$$

上进行，則对于满足不等式

$$t_m\leqslant t'<t_{m+1},\qquad t_n\leqslant t''<t_{n+1}$$

的一切 t'，t''，都应当成立着

$$P(t', x, t'', \mathscr{E}) = P(t_m, x, t_n, \mathscr{E}). \quad (2.13)$$

設

$$P(t_m, x, t_n, \mathscr{E}) = P_{mn}(x, \mathscr{E}), \quad (2.14)$$

$$P_{n-1,n}(x, \mathscr{E}) = P_n(x, \mathscr{E}), \quad (2.15)$$

則得

$$P_{mn}(x, \mathscr{E}) = P_{m+1} * P_{m+2} * \cdots * P_n(x, \mathscr{E}). \quad (2.16)$$

因此，在这場合，体系 γ 的变化过程可以由初等分布函数 $P_n(x, \mathscr{E})$ 所完全决定。

設 $P_1(x, \mathscr{E})$，$P_2(x, \mathscr{E})$，… 是任意的分布函数，作为 x 的函数是可测的，設 $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$ 是时間叙列；若 $P_{mn}(x, \mathscr{E})$ 及 $P(t', x, t'', \mathscr{E})$ 是由(2.13)，(2.14)，(2.16)所規定，則所得的又一个分布函数，滿足方程

$$P_{mn}(x, \mathscr{E}) * P_{np}(x, \mathscr{E}) = P_{mp}(x, \mathscr{E}), \quad m < n < p, \quad (2.17)$$

且滿足

$$P(t', x, t'', \mathscr{E}) * P(t'', x, t''', \mathscr{E}) = P(t', x, t''', \mathscr{E}), \quad t' < t'' < t'''.$$

这也就是基本方程 (2.12) 或 (2.3)。由此可見任意分布函数 $P_n(x, \mathscr{E})$ 只要是 x 的可測函数，就可确定出一个随机过程。

概率論中通常只考慮上面所定义的离散时間方式。若全部分布函数 $P_n(x, \mathscr{E})$ 都相同：

$$P_n(x, \mathscr{E}) = P(x, \mathscr{E}), \quad (2.18)$$

則得离散时間的齐次概型；在这場合中，依(2.16)得

$$P_{n+p}(x, \mathscr{E}) = \overbrace{P(x, \mathscr{E}) * P(x, \mathscr{E}) * \cdots * P(x, \mathscr{E})}^{p\ \text{个}} = [P(x, \mathscr{E})]_*^p = P^p(x, \mathscr{E}). \quad (2.19)$$

在1900年，Bachelir 已經考虑到时間上为連續的随机过程[1]，而

---

[1] Bachelir: Théorie de la spéculation, Ann. de l'École norm 17, 1900, p. 21.

認为連續时間方式是概率論的中心問題，这是完全正确的。这里最重要的是时間上为齐次的方式，即 $P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})$ 只与 t_2-t_1 有关：

$$P(t, x, t+\tau, \mathscr{E})=P(\tau, x, \mathscr{E}). \tag{2.20}$$

这个場合中的基本方程可写为

$$P(\tau_1, x, \mathscr{E})*P(\tau_2, x, \mathscr{E})=P(\tau_1+\tau_2, x, \mathscr{E}). \tag{2.21}$$

若把初等状态 x 的集 $\mathfrak{A}$ 特殊化，則得到另一系列的特殊場合。这里分为有限的集 a 和可列的集 $\mathfrak{A}$；在連續的場合，体系的状态是依确定它的参数而分类，等等。这些划分构成了以下的題材。

4. 各态遍历原理

如果对于一切可能状态 x 的集 $\mathfrak{A}$ 不加任何条件，那末只能証明极少数的一般性定理。关于各态遍历原理的定理就是这样的定理。若对于任意的 $t^{(0)}, x, y, \mathscr{E}$，都有

$$\lim_{t\to\infty}[P(t^{(0)}, x, t, \mathscr{E})-P(t^{(0)}, y, t, \mathscr{E})]=0, \tag{2.22a}$$

則称随机过程依循各态遍历原理。对于离散时間概型，条件 (2.22a) 与下述条件为等价：

$$\lim_{n\to\infty}[P_{mn}(x, \mathscr{E})-P_{mn}(y, \mathscr{E})]=0. \tag{2.22b}$$

在这个場合中，可得出下面的定理。

定理 1 若对于任意的 $x, y, \mathscr{E}$，有

$$P_n(x, \mathscr{E})\geqslant\lambda_nP_n(y, \mathscr{E}), \quad \lambda_n\geqslant 0, \tag{2.23}$$

且級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$$

发散，則各态遍历原理 (2.22b) 成立，且对 $x, y, \mathscr{E}$，一致收斂。

証 設

$$\left.\begin{aligned}\sup[P_{kn}(x, \mathscr{E})]&=M_{kn}(\mathscr{E}),\\ \inf[P_{kn}(x, \mathscr{E})]&=m_{kn}(\mathscr{E}).\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

显然，对于 $i<k$ 有

$$P_{in}(x,\mathscr{E})=\int_{\mathfrak{A}_y}P_{kn}(y,\mathscr{E})P_{ik}(x,d\,\mathfrak{A})$$

$$\leqslant M_{kn}(\mathscr{E})\int_{\mathfrak{A}_y}P_{ik}(x,d\,\mathfrak{A})=M_{kn}(\mathscr{E}).\tag{2.25}$$

同理得

$$P_{ik}(x,\mathscr{E})\geqslant m_{kn}(\mathscr{E}).\tag{2.26}$$

由(2.23)，对任何 x 及 y 得

$$P_k(x,\mathscr{E})-\lambda_k P_k(y,\mathscr{E})\geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}P_{k-1,n}(x,\mathscr{E})&=\int_{\mathfrak{A}_z}P_{kn}(z,\mathscr{E})P_k(x,d\,\mathfrak{A})\\&=\int_{\mathfrak{A}_z}P_{kn}(z,\mathscr{E})[P_k(x,d\,\mathfrak{A})-\lambda_k P_k(y,d\,\mathfrak{A})]\\&\quad+\lambda_k\int_{\mathfrak{A}_z}P_{kn}(z,\mathscr{E})P_k(y,d\,\mathfrak{A})\\&\geqslant m_{kn}(\mathscr{E})\int_{\mathfrak{A}_z}[P_k(x,d\,\mathfrak{A})-\lambda_k P_k(y,d\,\mathfrak{A})]\\&\quad+\lambda_k P_{k-1,n}(y,\mathscr{E})\\&=m_{kn}(\mathscr{E})(1-\lambda_k)+\lambda_k P_{k-1,n}(y,\mathscr{E}).\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&P_{k-1,n}(y,\mathscr{E})-P_{k-1,n}(x,\mathscr{E})\\&\qquad\leqslant(1-\lambda_k)[P_{k-1,n}(y,\mathscr{E})-m_{kn}(\mathscr{E})].\end{aligned}$$

由(2.25)得

$$\begin{aligned}&P_{k-1,n}(y,\mathscr{E})-P_{k-1,n}(x,\mathscr{E})\\&\qquad\leqslant(1-\lambda_k)[M_{kn}(\mathscr{E})-m_{kn}(\mathscr{E})].\end{aligned}\tag{2.27}$$

既然(2.27)对任何 x 及 y 均成立，故又可得

$$M_{k-1,n}(\mathscr{E})-m_{k-1,n}(\mathscr{E})\leqslant(1-\lambda_k)[M_{kn}(\mathscr{E})-m_{kn}(\mathscr{E})].\tag{2.28}$$

在(2.28)中，令 $k=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n$，相乘而得

$$M_{mn}(\mathscr{E})-m_{mn}(\mathscr{E})\leqslant\prod_{k=m+1}^{n}(1-\lambda_k).\tag{2.29}$$

当 $n\to\infty$ 时，(2.29)的右方收斂于 0，定理得証。

对于离散时間的齐次場合，則得下面的

定理 2　若对于任意的 $x, y, \mathscr{E}$，有

$$P(x, \mathscr{E})\geqslant\lambda P(y, \mathscr{E}),\quad \lambda>0, \tag{2.30}$$

則 $P^n(x, \mathscr{E})$ 一致收斂于一个固定的分布函数 $Q(\mathscr{E})$.

証　在現在的場合中，

$$M_{n, n+p}(\mathscr{E})=\sup[P^p(x, \mathscr{E})]=M_p(\mathscr{E}),$$

$$m_{n, n+p}(\mathscr{E})=\inf[P^p(x, \mathscr{E})]=m_p(\mathscr{E}),$$

$$\lambda_n=\lambda.$$

由(2.29)卽得

$$M_p(\mathscr{E})-m_p(\mathscr{E})\leqslant(1-\lambda)^p. \tag{2.31}$$

而由(2.26)和(2.25)，对 $q>p$ 有

$$P^q(x, \mathscr{E})=P_{0q}(x, \mathscr{E})\leqslant M_{q-p, q}(\mathscr{E})=M_p(\mathscr{E}), \tag{2.32}$$

$$P^q(x, \mathscr{E})\geqslant m_p(\mathscr{E}). \tag{2.33}$$

故得

$$M_p(\mathscr{E})\geqslant M_q(\mathscr{E})\geqslant m_q(\mathscr{E})\geqslant m_p(\mathscr{E}). \tag{2.34}$$

从(2.31)和(2.34)卽可直接得出我們的定理。

Hostinsky 及 Hadamard 曾証明了定理 2 的重要特殊場合❶。易知分布函数 $Q(\mathscr{E})$ 滿足积分方程

$$Q(\mathscr{E})=\int_{\mathfrak{A}_x}P(x, \mathscr{E})Q(d\,\mathfrak{A}). \tag{2.35}$$

Hadamard 曾証明了(2.35)的一种特殊情形。

对一般的随机过程有

定理 3　若对于叙列

$$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots\to+\infty$$

及任意的 $x, y, \mathscr{E}$，有

---

❶ Comptes rendus, 186, 1928, S. 59, 189, 275.

$$P(t_{n-1}, x, t_n, \mathscr{E}) \geqslant \lambda_n(t_{n-1}, y, t_n, \mathscr{E}), \quad \lambda_n \geqslant 0, \tag{2.36}$$

且級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ 发散，則各态遍历原理 (2.22a) 满足且 (2.22a) 对 $x, y, \mathscr{E}$ 一致收斂。

証 設对于固定的 $t^{(0)}$，

$$\sup[P(t^{(0)}, x, t, \mathscr{E})] = M(t, \mathscr{E}),$$

$$\inf[P(t^{(0)}, x, t, \mathscr{E})] = m(t, \mathscr{E}).$$

若 $t^{(0)} \leqslant t_m \leqslant t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$，則如定理1的証明一样，得到相当于 (2.29) 的

$$M(t, \mathscr{E}) - m(t, \mathscr{E}) \leqslant \prod_{k=m+1}^{n} (1-\lambda_k). \tag{2.37}$$

既然 n 随 t 变成无穷大，則差式 $M(t, \mathscr{E}) - m(t, \mathscr{E})$ 随 t 而收斂于 0，定理遂得到証明。

最后，对于时間为齐次的概型有相应于定理2的

定理 4 設有这样的一个 λ，使对于任何 $x, y, \mathscr{E}$，都有

$$P(\sigma, x, \mathscr{E}) \geqslant \lambda P(\sigma, y, \mathscr{E}), \ \lambda > 0, \tag{2.37'}$$

則 $P(\tau, x, \mathscr{E})$ 随 $\tau \to +\infty$ 而一致收斂于一个固定的分布函数 $Q(\mathscr{E})$.

§3 有限系状态

1. 导論

假設集 $\mathfrak{A}$ 包含有限个元

$$x_1, x_2, \cdots, x_n,$$

且令

$$P(t_1, x_i, t_2, x_j) = P_{ij}(t_1, t_2). \tag{3.1}$$

对于任何 $\mathscr{E}$，显然有

$$P(t_1, x_i, t_2, \mathscr{E}) = \sum_{x_k \in \mathscr{E}} P_{ik}(t_1, t_2), \tag{3.2}$$

所以只要考虑概率 $P_{ik}(t_1, t_2)$ 就够了。基本方程 (2.3) 此时就变成

下列形状：

$$\sum_j P_{ij}(t_1, t_2) P_{jk}(t_2, t_3) = P_{ik}(t_1, t_3), \tag{3.3}$$

至于(2.1)則变成

$$\sum_j P_{ij}(t_1, t_2) = 1. \tag{3.4}$$

任何一个非負函数，只要滿足(3.3)及(3.4)就定义出描述体系 γ 变化的一个随机过程。

算子 $*$ 現在規定为

$$F_{ik} = F_{ik}^{(1)} * F_{ik}^{(2)} = \sum_j F_{ij}^{(1)} F_{jk}^{(2)}. \tag{3.5}$$

由是基本方程(3.3)变成

$$P_{ik}(t_1, t_2) * P_{ik}(t_2, t_3) = P_{ik}(t_1, t_3). \tag{3.6}$$

在离散时間概型的場合，設

$$P_{pq}(x_i, x_j) = P_{ij}^{(pq)}, \quad P_p(x_i, x_j) = P_{ij}^{(p)},$$

則概率 $P_{ij}^{(p)}$ 滿足方程

$$\sum_j P_{ij}^{(p)} = 1. \tag{3.7}$$

反之，若任意非負的数 $P_{ij}^{(p)}$ 滿足这个方程，則这些数可看作随机过程相应的概率数值。

概率 $P_{ij}^{(pq)}$ 則可依下列公式算出：

$$P_{ij}^{(pq)} = P_{ij}^{(p+1)} * P_{ij}^{(p+2)} * \cdots * P_{ij}^{(q)}. \tag{3.8}$$

在离散时間的齐次場合，則有

$$P_{ij}^{(p)} = P_{ij}, \quad P_{ij}^{(p,q)} = [P_{ij}]_*^{q-p} = P_{ij}^{q-p}.$$

若所有的 P_{ij} 都是正的，則§2.4的条件当然滿足，而且 P_{ij}^q 在 $q \to \infty$ 时趋于一个固定的极限 Q_j。此时积分(2.35)变成方程組

$$Q_i = \sum_j Q_j P_{ji} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots). \tag{3.9}$$

这个結果已为 Hostinsky 及 Hadamard 所得到❶。

---

❶ Comptes rendus, 186, 1928, S. 59, 189, 275.

2. 連續随机过程的微分方程

由(2.11)得

$$\left.\begin{aligned} P_{ii}(t, t) &= 1, \\ P_{ij}(t, t) &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

設

$$\left.\begin{aligned} &\lim[P_{ii}(t, t+\Delta)] = 1, \\ &\lim[P_{ij}(t, t+\Delta)] = 0, \quad \Delta \to 0 \quad i \neq j. \end{aligned}\right\}$$

即在很短的时間內，体系状态的改变是小的。这个假設包括在函数 $P_{ij}(t_1, t_2)$ 对 t_1 及 t_2 是連續的这一假定之內。

再設函数 $P_{ij}(s, t)$ 为連續且在 $t \neq s$ 时为可微，在 $t=s$ 上，可不必要求可微性。在这种特殊点上假定导数存在是一件粗心的事。

对于 $t>s$ 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t} &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{P_{ik}(s, t+\Delta) - P_{ik}(s, t)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} [\sum_j P_{ij}(s, t) P_{j,k}(t, t+\Delta) - P_{ik}(s, t)] \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \left[\sum_{j \neq k} P_{ij}(s, t) \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} + P_{ik}(s, t) \frac{P_{kk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta}\right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

若行列式

$$\Xi = |P_{ij}(s, t)|$$

不等于0，則方程組

$$\sum_{j \neq k} P_{ij}(s, t) \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} + P_{ik}(s, t) \frac{P_{kk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta} = a_{ik}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

有解：

$$\frac{P_{kk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta} = \frac{\lambda_{kk}}{\Xi}, \quad j \neq k \text{ 时 } \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} = \frac{\lambda_{jk}}{\Xi} \tag{3.12}$$

由(3.11)，在 $\Delta\to 0$ 时 α_{ik} 收斂于 $\dfrac{\partial P_{ik}(s,t)}{\partial t}$，故(3.12)也收斂于固定的极限：

$$\lim \frac{P_{kk}(t,t+\Delta)-1}{\Delta}=A_{kk}(t), \tag{3.13a}$$

$$\lim \frac{P_{jk}(t,t+\Delta)}{\Delta}=A_{jk}(t), \quad j\neq k. \tag{3.13b}$$

行列式 Ξ 对于一个适当的 $s<t$ 是可以不等于 0 的，这可从 Ξ 的連續性及公式(3.10)而看出：

$$\lim \Xi=1, \quad s\to t. \tag{3.14}$$

从(3.11)及(3.13)即可得到关于函数 $P_{ik}(s,t)$ 的第一組微分方程

$$\frac{\partial P_{ik}(s,t)}{\partial t}=\sum_j A_{jk}(t)P_{ij}(s,t)=P_{ik}(s,t)*A_{ik}(t). \tag{3.15}$$

由是依(3.10)及(3.13)得

$$A_{ik}(t)=\left[\frac{\partial P_{ik}(t,u)}{\partial u}\right]_{u=t}, \tag{3.16}$$

$$A_{ik}(t)\geqslant 0 \quad j\neq k, \; A_{kk}\leqslant 0. \tag{3.17}$$

再依(3.4)及(3.13)得

$$\sum_k A_{jk}=0. \tag{3.18}$$

方程(3.15)本只对 $s<t$ 而言，但依(3.10)及(3.16)，可見对 $t=s$ 也有效。

对于 $s<t$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{ik}(s,t)}{\partial s}&=\lim \frac{P_{ik}(s+\Delta,t)-P_{ik}(s,t)}{\Delta}\\&=\lim \frac{1}{\Delta}\Big[P_{ik}(s+\Delta,t)-\sum_j P_{ij}(s,s+\Delta)P_{jk}(s+\Delta,t)\Big]\\&=-\lim\Big[\frac{P_{ii}(s,s+\Delta)-1}{\Delta}P_{ik}(s+\Delta,t)\\&\qquad+\sum_{j\neq i}\frac{P_{ij}(s,s+\Delta)}{\Delta}P_{jk}(s+\Delta,t)\Big], \quad \Delta\to 0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

依(3.13)得第二組微分方程

$$\frac{\partial P_{ik}(s,t)}{\partial s}=-\sum_j A_{ij}(s)P_{jk}(s,t)=-A_{ik}(s)*P_{ik}(s,t). \quad (3.20)$$

若函数 $A_{ij}(s)$ 为連續，方程(3.20)在 $s=t$ 时也显然有效。

现在設在 t_0 时以分布函数

$$Q(t_0, x_k)=Q_k(t_0), \quad \sum_k Q_k(t_0)=1$$

表出体系 γ 在 t_0 上处于状态 x_k 的概率。此时方程(2.5)卽变成

$$Q_k(t)=\sum_i Q_i(t_0)\cdot P_{ik}(t_0, t).$$

由此可知函数 $Q_k(t)$ 滿足微分方程

$$\frac{dQ_k(t)}{dt}=\sum_j A_{jk}(t)Q_j(t) \quad (k=1, 2, \cdots, n). \quad (3.21)$$

若函数 $A_{ik}(t)$ 連續，則函数 $P_{ik}(s,t)$ 构成微分方程組(3.15)的唯一滿足初始条件(3.10)的解。因此随机过程为 $A_{ik}(t)$ 所完全决定。函数 $A_{ik}(t)$ 的具体意义可解释为：若 $i\neq k$，則 $A_{ik}dt$ 是在时間从 t 到 $t+dt$，而从状态 x_i 过渡到 x_k 的概率，且

$$A_{kk}=-\sum_{j\neq k} A_{kj}(t).$$

还可以証明，不論 $A_{kk}(t)$ 是怎样的滿足条件(3.17)及(3.18)的連續函数，微分方程(3.15)的滿足初始条件(3.10)的解 $P_{ij}(s,t)$ 是非負的，且滿足条件(3.3)及(3.4)，卽規定出一个随机过程。

这是由于：根据(3.15)及(3.18)，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_k P_{ik}(s,t)=\sum_j\left[\sum_k A_{jk}(t)\right]P_{ij}(s,t)=0. \quad (3.22)$$

而由(3.10)，有

$$\sum_k P_{ik}(t,t)=1.$$

故由(3.22)卽得(3.4)。

对于 $t_1<t_2$，設

$$P'_{ik}(t_1, t)=P_{ik}(t_1, t), \quad 若\ t_1\leqslant t\leqslant t_2, \quad (3.23)$$

$$P'_{ik}(t_1, t)=\sum_j P_{ij}(t_1, t_2) P_{jk}(t_2, t), \quad 若\ t_2<t. \tag{3.24}$$

函数 $P'_{ik}(t_1, t)$ 且满足微分方程 (3.15)，故方程 (3.23) 不仅对于 $t\leqslant t_2$ 且对于任何 t 都成立。所以若令 $t=t_3$，公式(3.23)就和(3.3)一样了。

剩下来要証明的只是 $P_{ik}(t_1, t)$ 为非負的。为此令

$$\varphi(t)=\min_{i,k}[P_{ik}(s, t)].$$

适当选取 i 和 k，可得

$$D^+\varphi(t)=\frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t}, \quad P_{ik}(s, t)=\varphi(t),$$

且若 $\varphi(t)\leqslant 0$，依(3.17)得

$$A_{kk}(t) P_{ik}(s, t)\geqslant 0,$$

$$A_{jk}(t) P_{ij}(s, t)\geqslant A_{jk}(t)\varphi(t), \quad j\neq k,$$

$$D^+\varphi(t)=\frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t}=\sum_j A_{jk}(t) P_{ij}(s, t)$$

$$\geqslant\sum_{j\neq k} A_{jk}(t)\varphi(t)=R(t)\varphi(t).$$

因为 $\varphi(s)=0$，易見 $\varphi(t)$ 大于方程

$$\frac{dy}{dt}=R(t)y$$

的各負根，故它自己不能是負的。

3. 举例

对时間为齐次的情形中，$A_{ik}(t)$ 是与 t 无关的，此时过程是由 n^2 个常数 A_{ij} 所完全决定，方程(3.15)变成

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt}=\sum_j A_{jk}P_{ij}(t). \tag{3.25}$$

解这个方程是沒有什么困难的。若各数 A_{ij} 不等于 0，则 § 2.4 定理 4 的条件满足，故 $P_{ik}(t)$ 在 $t\to\infty$ 时收斂于固定极限 Q_k，数 Q_k 满足方程

$$\sum_k Q_k=1;\quad \sum_j A_{jk}Q_j=0\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

例如取

$$n=2,$$
$$A_{12}=A_{21}=A,$$
$$A_{11}=A_{22}=-A.$$

即由状态 x_1 过渡到状态 x_2 的概率与相反的过渡概率是相等的。此时由微分方程(3.25)得到

$$P_{12}(t)=P_{21}(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2At}),$$
$$P_{11}(t)=P_{22}(t)=\frac{1}{2}(1+e^{-2At}).$$

可以看出在 $t\to\infty$ 时，$P_{ik}(t)$ 收斂于 $Q_k=\frac{1}{2}$.

下面一例指出 Q_k 的收斂也可以伴随着阻尼运动：$n=3$,

$$A_{12}=A_{23}=A_{31}=A,$$
$$A_{21}=A_{32}=A_{13}=0,$$
$$A_{11}=A_{22}=A_{33}=-A,$$
$$P_{11}(t)=P_{22}(t)=P_{33}(t)=\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}At}\cos\alpha t+\frac{1}{3},$$
$$P_{12}(t)=P_{23}(t)=P_{31}(t)=e^{-\frac{3}{2}At}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha t-\frac{1}{3}\cos\alpha t\right]+\frac{1}{3},$$
$$P_{21}(t)=P_{32}(t)=P_{13}(t)=-e^{-\frac{3}{2}At}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha t+\frac{1}{3}\cos\alpha t\right]+\frac{1}{3},$$
$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}A.$$

离散时間情形下相应的阻尼振动是由 Романовский 所发現的。

§4 可列系状态

1. 导論 离散时間

若集 $\mathfrak{A}$ 包含可列个元

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

前节的結果及記号仍有效，級数

$$\sum_k P_{ik}(t_1, t_2)=1, \quad \sum_k P_{ik}=1$$

的收斂已假定，故得(3.3)，(3.5)，(3.9)各級数的收斂；但并不要求

$$\sum_i P_{ik}(t_1, t_2)$$

也为收斂。現在对于离散时間的方式加以一些注解(实际上是对于齐次离散时間的)。各态遍历原理的定理的条件在可列状态情形一般是不成立的，但原理本身却常常满足，例如考虑一个 Бернштейн 新近所考虑的例子：設一博奕者每局以概率 A 贏一子，在他所有的子不等于 0 时有概率 B 輸一子，$B>A, A+B\leqslant 1$，若他所有的子等于 0，他就不輸什么。

若 x_n 是博奕者持有 $n-1$ 子时的状态，博奕的条件可写为

$$P_{n,n+1}=A, \qquad P_{n+1,n}=B, \quad n=1, 2, 3, \cdots$$
$$P_{11}=1-A,$$
$$P_{n,n}=1-A-B, \qquad n=2, 3, 4, \cdots$$

其他的 $P_{ij}=0$。

容易証明

$$\lim_{p\to\infty} P_{ij}^p=\left(1-\frac{A}{B}\right)\left(\frac{A}{B}\right)^{j-1}=Q_j, \quad \sum_j Q_j=1$$

成立，故得各态遍历原理。

也要注意，极限

$$\lim P_{ij}^p=A_j \quad (p\to\infty)$$

的存在，只在和式

$$\sum_j A_j=A$$

等于 1 时才得出各态遍历原理。我們可以証明一定的$A\leqslant 1$，且在 $A<1$ 的場合各态遍历原理是不成立的。

若所有的 A_j 都存在且等于 0，則发生 P_{ij}^p 在 $p\to\infty$ 时的漸近表达問題。若有这样的一种可以与 i 无关的表达法：

$$P_{ij}^p=\lambda_j^p+o(\lambda_j^p),$$

就說满足了局部的各态遍历原理。这一原理对状态为可列的情形是很重要的。

現在設可能状态 x 用全部整数来編号$(-\infty<n<+\infty)$，§3.1 的記号及公式都全有效，只是和式記号要遍及于全部整数。我們更仔細地来考虑

$$P_{ij}=P_{j-i}$$

的場合。在这場合显然也可得

$$P_{ij}^p=P_{j-i}^p,$$

$$P_k^{p+1}=\sum_i P_i^p P_{k-i},$$

$$P_k^{m+n}=\sum_i P_i^m P_{k-i}^n.$$

若級数

$$a=\sum_k kP_k,$$

$$b^2=\sum_k k^2P_k$$

絕对收斂，則 Laplace 漸近公式可写为

$$P_k^p=\frac{1}{b\sqrt{2\pi p}}e^{-\frac{(k-pa)^2}{2pb^2}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right). \tag{4.1}$$

关于这公式成立的条件，只知道在 Bernoulli 場合

$$P_0=1-A,\quad P_1=A, \tag{4.2}$$

$$\text{其他的 } P_k \text{ 为 } 0,$$

对我們这个問題，Ляпунов 定理不起作用，因为

$$P_{+1}=P_{-1}=\frac{1}{2},$$

$$P_k=0,\qquad k\neq\pm1,$$

而(4.1)并不满足。(4.1)的成立，一般都必須对任何整数 m 都存在着一个 k，使

$$k \neq 0 \pmod{m}, \quad P_k \neq 0.$$

也要注意，只在 $a=0$ 的場合，公式(4.1)才对固定的 k 实际給出 P_k^p 的一个漸近表示式。在这場合固定了 k 可由(4.1)推得

$$P_k^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi p b}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right), \tag{4.3}$$

又固定 i 和 j，得 ($\because \quad h=j-i$)

$$P_{ij}^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi p\, b}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right). \tag{4.4}$$

这里所論的場合，依(4.4)是滿足局部各态遍历原理的。

若体系状态不变的概率 P_{ii} 在各变化的时間上很接近于 1，則得 P_{ij}^p 的一类很特別的近似公式，例如在 Bernoulli 場合(4.2)中，对于 Δ 的小值，得出 Poisson 近似公式

$$P_k^p \sim \frac{\Delta^k p^k}{k!} e^{-\Delta p}. \tag{4.5}$$

这种公式推导的一般方法是从应用对时間为連續的过程的微分方程得出，公式(4.5)就是这样在 § 4.3 內得到証明的。

2. 依时間为連續的过程的微分方程

在 § 3.2 中已假定函数 $P_{ij}(s, t)$ 为連續，且在 $s \neq t$ 时对 s 和 t 为可微，公式(3.11)和(3.19)在現在所考慮的有可列个可能状态的場合也和以前一样。但要証明这些公式中的极限記号与和式記号可交换次序，以便于得出微分方程(3.15)及(3.20)。現在必須引进下列新的限制条件：

(i) 极限(3.13)存在。

(ii) 固定了 k，(3.13b)的收斂对于 j 是一致的。

(iii) 級数

$$\sum_{k \neq j} \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta} = \frac{1-P_{jj}(t, t+\Delta)}{\Delta} \tag{4.6}$$

的收斂对于 Δ 是一致的((4.6)的收斂由(3.4)可直接得出)。

条件(i)在 §3.2 的有限数状态場合是依据函数 $P_{ij}(s, t)$ 在 $s\neq t$ 时的可微性来証明的；在可列場合就不能如此得出了。对于条件(ii)，我們应注意：固定了 j 后，(3.13b)的一致收斂性可从不等式

$$P_{jk}(t, t+\Delta)\leqslant 1-P_{jj}(t, t+\Delta)$$

推得。(3.13b)对于任何 j 和 k 都是一致的，但(3.13a)对 k 就不一定为一致。这些要求在应用上是不方便的。

公式(3.11)里的因子 $P_{ij}(s, t)$ 构成一个絕对收斂級数，依条件(i)和(ii)，这个公式里的极限記号可与和式記号对調，且由之而得微分方程(3.15)，是故数 $A_{jk}(t)$ 显然满足(3.16)及(3.17)；公式(3.18)也由条件(iii)而得到满足。从最后的条件及因子 $P_{jk}(s+\Delta, t)$ 的一致有界性可保証公式(3.19)的极限記号能与和式記号对調，这就推得微分方程(3.20)。

3. 在时間为齐次的場合里，解的唯一性及計算法

在这个場合里，方程(3.15)变成

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt}=\sum_j A_{jk}P_{ij}(t)=P_{ik}(t)*A_{ik}, \tag{4.7}$$

其中 A_{ik} 是常数。我們証明在这个場合里当下列級数(4.8)及(4.9)为收斂，并滿足初始条件(4.10)时，方程(4.7)有唯一的解存在：

$$\left.\begin{array}{l}\sum_j |A_{jk}|=B_k^{(1)},\\ \sum_j B_j^{(1)}|A_{jk}|=B_k^{(2)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_j B_j^{(n)}|A_{jk}|=B_k^{(n+1)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} \tag{4.8}$$

$$\sum_n \frac{B_k^{(n)}}{n!}x^n \quad k=1, 2, 3, \cdots \quad |x|\leqslant\theta>0. \tag{4.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &P_{ii}(0)=1,\\ &P_{ij}(0)=0,\ i\neq j. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

既然 $P_{ij}(t)\leqslant 1$，則从(4.7)及(4.8)就可得不等式

$$\left|\frac{dP_{ik}(t)}{dt}\right|\leqslant B_k^{(1)}.$$

故把(4.7)微分后可得

$$\frac{d^2P_{ik}(t)}{dt^2}=\sum_j A_{jk}\frac{dP_{ij}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}P_{ik}(t)*A_{ik}.$$

同理可得一般的

$$\left|\frac{d^nP_{ik}(t)}{dt^n}\right|\leqslant B_k^{(n)}, \tag{4.11}$$

$$\frac{d^{n+1}P_{ik}(t)}{dt^{n+1}}=\frac{d^n}{dt^n}P_{ik}(t)*A_{ik}. \tag{4.12}$$

从(4.11)和級数(4.9)的收斂条件得知 $P_{ik}(t)$ 是解析函数。又由(4.7)及(4.12)得

$$\frac{d^n}{dt^n}P_{ik}(t)=P_{ik}(t)*[A_{ik}]_*^n. \tag{4.13}$$

特別在 $t=0$ 时，依(4.10)得

$$\frac{d^n}{dt^n}P_{ik}(0)=[A_{ik}]_*^n. \tag{4.14}$$

所以解析函数 $P_{ik}(t)$ 是由常数 A_{ik} 唯一确定。公式(4.14)及(4.13)可用来作为依 Taylor 級数求方程組(4.7)的解的計算根据。

例如，若 $A_{i,i+1}=A$，$A_{i,i}=-A$，其余的 $A_{ij}=0$，則易得

$$\begin{aligned} &P_{mn}(t)=\frac{(At)^{n-m}}{(n-m)!}e^{-At}, && m\leqslant n,\\ &P_{mn}(t)=0, && m>n, \end{aligned}$$

此即 Poisson 分布公式；这和(4.5)的 $k=n-m$，$p=t$ 是完全一致的。

若各态遍历原理满足，且 $P_{ik}(t)$ 在 $t\to\infty$ 时收斂于 Q_k，显然常数 Q_k 满足

$$\left.\begin{array}{l}\sum_k Q_k=1,\\ \sum_i A_{ik}Q_i=0,\quad (k=1,2,\cdots).\end{array}\right\}\qquad(4.15)$$

例如,若

$$A_{i,\ i+1}=A,\ A_{i+1,i}=B\quad(B>A),$$

$$A_{11}=-A,\ A_{ii}=-(A+B)\quad i>1,$$

且其余的 $A_{ij}=0$,

则易由方程(4.15)得出

$$Q_n=\left(1-\frac{A}{B}\right)\left(\frac{A}{B}\right)^{n-1}.$$

作为第二个例,設

$$A_{i,i+1}=A;\quad A_{i+1,i}=iB$$

$$A_{ii}=-A-(i-1)B;\ \text{其余的}\ A_{ij}=0,$$

这样方程(4.15)就給出

$$Q_{n+1}=\frac{1}{n!}\left(\frac{A}{B}\right)^n e^{-\frac{A}{B}}.$$

故也是 Poisson 公式。

§5 連續系状态,单参数場合

1. 引論

现在設所考虑体系的状态是由一个实值参数 x 来規定。在这場合里,我們用 x 表示状态本身,同时又表示相应于該状态的参数之值。若 $\mathscr{E}_y$ 是满足条件 $x\leqslant y$ 的一切状态 x 的集,则設

$$F(t_1,x,t_2,y)=P(t_1,x,t_2,\mathscr{E}_y),$$

$F(t_1,x,t_2,y)$ 是 y 的单調函数,并为右方連續,且满足极限条件

$$F(t_1,x,t_2,-\infty)=0,\ F(t_1,x,t_2,+\infty)=1.\qquad(5.1)$$

对于 $F(t_1,x,t_2,y)$,基本方程(2.3)变成

$$F(t_1,x,t_3,z)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t_2,y,t_3,z)dF(t_1,x,t_2,y).\qquad(5.2)$$

在这种情况下,我們又回到随机变数的分布函数及常义的 Stieltjes 积分了。

若 $F(t_1, x, t_2, y)$ 对 y 是 Borel 意义上可测，則积分 (5.2) 依 Lesbesgue 的意义为完全确定。以下我們假設集系 $\mathscr{F}$ 和全体的 Borel 集是一致的,故 $F(t_1, x, t_2, y)$ 对 x 是 Borel 可测。所以我們知道,一切 Borel 集 $\mathscr{E}$ 的加性集函数 $P(t_1, x, t_2, \mathscr{E})$ 是由相应的函数 $F(t_1, x, t_2, y)$ 所唯一决定的。

单调且右方連續的函数 $F(y)$ 若滿足条件

$$F(-\infty)=0, \quad F(+\infty)=1,$$

則称为分布函数，若 $F_1(x, y)$ 及 $F_2(x, y)$ 当作 x 的函数是 Borel 可测,当作 y 的函数是分布函数,則函数

$$F(x, y)=F_1(x, y)\oplus F_2(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty} F_2(z, y)\,dF_1(x, z) \quad (5.3)$$

也有同样性质。

算子$\oplus$和 * 一样地滿足結合律,用它可把基本方程(5.2)写为

$$F(t_1, x, t_3, y)=F(t_1, x, t_2, y)\oplus F(t_2, x, t_3, y). \quad (5.4)$$

若 $F_1(x, y)=V_1(y-x)$, $F_2(x, y)=V_2(y-x)$, 則不难計算出:

$$F_1(x, y)\oplus F_2(x, y)=V(y-x)=V_1(y-x)\odot V_2(y-x), \quad (5.5)$$

$$V(x)=V_1(x)\odot V_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} V_2(x-z)\,dV_1(z). \quad (5.6)$$

算子$\odot$也滿足結合律，且对分布函数还滿足交换律。若把 $V_1(x)$ 及 $V_2(x)$ 当作二个相互独立的随机变数 X_1, X_2 的分布函数看待,則 $V_1(x)\odot V_2(x)$ 就表示出和式 $X=X_1+X_2$ 的分布函数。

若 $F(t_1, x, t_2, y)$ 是 y 的絕对連續函数,則

$$F(t_1, x, t_2, y)=\int_{-\infty}^{y} f(t_1, x, t_2, y)\,dy. \quad (5.7)$$

由此可知非負函数 $f(t_1, x, t_2, y)$ 对 x 与 y 为 Borel 可测,且滿足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, x, t_2, y)\,dy = 1, \tag{5.8}$$

$$f(t_1, x, t_3, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, x, t_2, y) f(t_2, x, t_3, z)\,dz. \tag{5.9}$$

反之，若 $f(t_1, x, t_2, y)$ 满足所有这些要求，则由(5.7)所定义的函数 $F(t_1, x, t_2, y)$ 可使方程(5.1)及(5.2)成立；于是这样的一个函数 $f(t_1, x, t_2, y)$ 就定义出一个随机过程的概型，我們又称函数 f 是随机变数 y 的微分分布函数。

我們还可以注意下面的混合公式

$$F(t_1, x, t_3, z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t_2, y, t_3, z) f(t_1, x, t_2, y)\,dy, \tag{5.10}$$

$$f(t_1, x, t_3, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_2, y, t_3, z)\,dF(t_1, x, t_2, y). \tag{5.11}$$

在离散时間概型的場合，則考虑函数

$$F_{mn}(x, y) = F(t_m, x, t_n, y),$$
$$F_n(x, y) = F_{n-1,n}(x, y).$$

这二个函数满足方程

$$F_{m,n+1}(x, y) = F_{mn}(x, y) \oplus F_{n+1}(x, y), \tag{5.12}$$

$$F_{kn}(x, y) = F_{km}(x, y) \oplus F_{mn}(x, y), \quad k<m<n. \tag{5.13}$$

若

$$F_{mn}(x, y) = \int_{-\infty}^{y} f_{mn}(x, y)\,dy, \quad f_n(x, y) = f_{n-1,n}(x, y),$$

即可得

$$f_{m,m+1}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{mn}(x, y) f_{n+1}(y, z)\,dy, \tag{5.14}$$

$$f_{kn}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{km}(x, y) f_{mn}(y, z)\,dy, \quad k<m<n. \tag{5.15}$$

2. Lindeberg 方法，从离散到連續的过程

在§2.3里已提及，概率論中通常只考虑时間上为离散的概型，基本問題在于建立分布函数 $F_{mn}(x, y)$ 对于差 $n-m$ 較大时

的近似公式；在本質上也就是建立 $n\to\infty$ 时 $F_{mn}(x, y)$ 的漸近公式。这个方向最重要的結果是 Laplace-Ляпунов 的定理。現在我們要更仔細地来研究这个定理的 Lindeberg 証明[1]，借以看出它的中心思想的最一般形式，而通过这形式来得出 $F_{mn}(x, y)$ 的漸近公式的一般性的推导方法。

設 $F_n(x, y)=V_n(y-x)$,

$$a_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)\,dF_n(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}y\,dV_n(y)=0,$$

$$b_n^2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)^2\,dF_n(x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2\,dV_n(y)=b_n^2,$$

$$B_{mn}^2=b_{m+1}^2+b_{m+2}^2+\cdots+b_n^2.$$

在一些附带的假設下，Laplace-Ляпунов 定理說明对于固定的 m 及增长的 n，有

$$F_{mn}(x, y)=\Phi\left(\frac{y-x}{B_{mn}}\right)+o(1),$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

对于 x 和 y 一致地成立。

在考虑由函数 $F_n(x, y)$ 所定义的离散时間的随机过程的同时，也考虑对时間为連續的情況。这种过程是以函数

$$\overline{F}(t', x, t'', y)=\Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{t''-t'}}\right)$$

来規定的。再設

$$t_0=0, \quad t_n=B_{0n}^2,$$

$$\overline{F}_{mn}(x, y)=\overline{F}(t_m, x, t_n, y),$$

$$\overline{F}_n(x, y)=\overline{F}_{n-1, n}(x, y),$$

显然可得

---

[1] Math. Zeitschr, 15, 1922, S. 211.

$$\overline{F}_n(x, y) = \Phi\left(\frac{y-x}{b_n}\right),$$

$$\overline{a}_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)\, d\overline{F}_n(x, y) = 0,$$

$$\overline{b}_n^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2\, dF_n(x, y) = b_n^2.$$

所以分布函数 $\overline{F}_n(x, y)$ 的第一、第二阶矩 $\overline{a}_n(x)$ 及 $\overline{b}_n^2(x)$ 与分布函数 $F_n(x, y)$ 相应的矩 $a_n(x)$，$b_n^2(x)$ 完全一致了。根据这个事实，Lindeberg 証明：差式

$$F_{mn}(x, y) - \overline{F}_{mn}(x, y)$$

在 $n \to \infty$ 时收斂于 0. 于是 Laplace-Ляпунов 的定理就由下列显著的公式得出：

$$\overline{F}_{mn}(x, y) = \Phi\left(\frac{y-x}{B_{mn}}\right).$$

对于任意函数 $F_n(x, y)$ 的一般場合，也可应用 Lindeberg 方法，不过要知道这样的一个函数 $\overline{F}(t', x, t'', y)$，它定义出一个連續的随机过程，且在时間叙列

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$$

上，它的 $a_n(x)$ 及 $b_n^2(x)$ 与矩 $\overline{a}_n(x)$ 及 $\overline{b}_n^2(x)$ 完全一致或所差极微。推导出这样函数的一般方法，在于应用連續过程的微分方程，这在下节再討論。至于从 $\overline{F}$ 到 F 的过渡，可用下面的定理：

轉移定理 設由函数 $F_n(x, y)$ 及 $\overline{F}_n(x, y)$ 定义出二个离散时間的随机过程，若

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y-x)\, dF_n(x, y) = a_n(x), \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)\, d\overline{F}_n(x, y) = \overline{a}_n(x), \quad (5.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2\, dF_n(x, y) = b_n^2(x), \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2\, d\overline{F}_n(x, y) = \overline{b}_n^2(x), \quad (5.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y-x|^3\, dF_n(x, y) = c_n(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |y-x|^3\, d\overline{F}_n(x, y) = \overline{c}_n(x), \quad (5.18)$$

$$\left.\begin{aligned}|a_n(x)-\bar{a}_n(x)|&\leqslant p_n,\\ |b_n^2(x)-\bar{b}_n^2(x)|&\leqslant q_n,\\ c_n(x)&\leqslant r_n,\\ \bar{c}_n(x)&\leqslant \bar{r}_n,\end{aligned}\right\}\tag{5.19}$$

且有这样的一个函数 $R(x)$ 使

$$\left.\begin{aligned}R(x)=0 &\quad 若\ x\leqslant 0,\\ 0\leqslant R(x)\leqslant 1 &\quad 若\ 0<x<l,\\ R(x)=1 &\quad 若\ l\leqslant x,\end{aligned}\right\}\tag{5.20}$$

$$U_{kn}(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}R(z-y)\,d\bar{F}_{kn}(x,y),\tag{5.21}$$

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x}U_{kn}(x,z)\right|&\leqslant K_n^{(1)}\\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{kn}(x,z)\right|&\leqslant K_n^{(2)}\\ \left|\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_{kn}(x,z)\right|&\leqslant K_n^{(3)}\end{aligned}\right\}\ (k=0,1,2,\cdots,n),\tag{5.22}$$

则得

$$\bar{F}_{0n}(x,y-l)-\varepsilon_n\leqslant F_{0n}(x,y)\leqslant \bar{F}_{0n}(x,y+l)+\varepsilon_n,\tag{5.23}$$

其中

$$\varepsilon_n=K_n^{(1)}\sum_{k=1}^{n}p_k+\frac{1}{2}K_n^{(2)}\sum_{k=1}^{n}q_k+\frac{1}{6}K_n^{(3)}\sum_{k=1}^{n}(r_k+\bar{r}_k).$$

这个定理也可应用到当 x 增长时 $a(x)$, $b(x)$ 与 $c(x)$ 为无界的場合。此时，常可引用一个适当的新变数 $x'=\varphi(x)$ 来消除无界性。

轉移定理的証明 由(3.21)得

$$\begin{aligned}U_{k-1,n}(x,y)&=\bar{F}_{k-1,n}(x,y)\oplus R(y-x)\\ &=\bar{F}_k(x,y)\oplus\bar{F}_{k+1}(x,y)\oplus\cdots\oplus\bar{F}_n(x,y)\oplus R(y-x)\\ &=\bar{F}_k(x,y)\oplus U_{kn}(x,y).\end{aligned}\tag{5.24}$$

又由(5.16), (5.17), (5.18), (5.22)得

$$U_{k-1,n}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}U_{kn}(z,y)d\bar{F}_k(x,z)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[U_{kn}(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}U_{kn}(x,y)\frac{z-x}{1}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{kn}(x,y)\frac{(z-x)^2}{2}$$

$$+\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_{kn}(x,y)\frac{(z-x)^3}{3!}\Big]d\bar{F}_k(x,z)$$

$$=U_{kn}(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}U_{kn}(x,y)\bar{a}_k(x)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{kn}(x,y)\frac{\bar{b}_n^2(x)}{2}+\bar{\theta}K_n^{(3)}\frac{\bar{c}_k(x)}{6},$$

$$|\bar{\theta}|\leqslant 1. \tag{5.25}$$

若令

$$V_{k-1,n}(x,y)=F_k(x,y)\oplus U_{kn}(x,y), \tag{5.26}$$

則得相应于公式(5.25)的

$$V_{k-1,n}(x,y)=U_{kn}(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}U_{kn}(x,y)a_k(x)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{kn}(x,y)\frac{b_n^2(x)}{2}+\theta K_n^{(3)}\frac{c_k(x)}{6},\quad |\theta|\leqslant 1. \tag{5.27}$$

从(5.25)及(5.27)根据(5.19)及(5.22)得

$$|U_{k-1,n}(x,y)-V_{k-1,n}(x,y)|$$

$$\leqslant K_n^{(1)}p_k+\frac{1}{2}K_n^{(2)}q_k+\frac{1}{6}K_n^{(3)}(r_k+\bar{r}_k). \tag{5.28}$$

再設

$$W_{kn}(x,y)=F_{0k}(x,y)\oplus U_{kn}(x,y)$$

$$=F_1(x,y)\oplus F_2(x,y)\oplus\cdots\oplus F_k(x,y)\oplus U_{kn}(x,y)$$

$$=F_{0,k-1}(x,y)\oplus V_{k-1,n}(x,y). \tag{5.29}$$

而由(5.28)得

$$|W_{kn}(x,y)-W_{k-1,n}(x,y)|$$

$$=|F_{0,k-1}(x,y)\oplus V_{k-1,n}(x,y)-F_{0,k-1}(x,y)\oplus U_{k-1,n}(x,y)|$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[V_{k-1,n}(z,y)-U_{k-1,n}(z,y)]\,dF_{0,k-1}(x,z)$$

$$\leqslant\sup|V_{k-1,n}(z,y)-U_{k-1,n}(z,y)|$$

$$\leqslant K_n^{(1)}p_k+\frac{1}{2}K_n^{(2)}q_k+\frac{1}{6}K_n^{(3)}(r_k+\bar{r}_k). \tag{5.30}$$

$$|W_{nn}(x,y)-W_{0n}(x,y)|$$

$$\leqslant K_n^{(1)}\sum_{k=1}^{n}p_k+\frac{1}{2}K_n^{(2)}\sum_{k=1}^{n}q_k+\frac{1}{6}K_n^{(3)}\sum_{k=1}^{n}(r_k+\bar{r}_k)=\varepsilon_n,$$

其中

$$W_{nn}(x,y)=F_{0n}(x,y)\oplus R(y-x)=\int_{-\infty}^{\infty}R(y-z)\,dF_{0n}(x,z).$$

若注意到

$$W_{0n}(x,y)=\bar{F}_{0n}(x,y)\oplus R(y-x)=\int_{-\infty}^{\infty}R(y-z)\,d\bar{F}_{0n}(x,z),$$

则依(5.20)得

$$\left.\begin{aligned}
&W_{nn}(x,y)\leqslant\int_{-\infty}^{y}dF_{0n}(x,z)=F_{0n}(x,y),\\
&W_{nn}(x,y+l)\geqslant\int_{-\infty}^{y}dF_{0n}(x,z)=F_{0n}(x,y),\\
&W_{0n}(x,y)\geqslant\int_{-\infty}^{y-l}d\bar{F}_{0n}(x,z)=\bar{F}_{0n}(x,y-l),\\
&W_{0n}(x,y+l)\leqslant\int_{-\infty}^{y+l}d\bar{F}_{0n}(x,z)=\bar{F}_{0n}(x,y+l),
\end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

从(5.30)及(5.31)卽得公式(5.23)。証明的細节請参考所举的 Lindebery 的論文。

3. 連續时間过程的第一微分方程

若体系 γ 在每一时間 t 都能起变化，則可以假定在小时間內参数 x 的大变化是很少发生的。严格一点說来，就是对于任意的 ε 有

$$P(t,x,t+\Delta,|y-x|>\varepsilon)\to 0,\quad \Delta\to 0. \tag{5.32}$$

在大多数場合中还可以假設更强的条件：

$$m^{(p)}(t, x, \Delta)=\int_{-\infty}^{\infty}|y-x|^{p}\,dF(t, x, t+\Delta, y)\to 0,\ \Delta\to 0,\quad(5.33)$$

至少对于开头的三个矩 $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, $m^{(3)}$ 能得到滿足。关于这种假設出現的可能性，其研究是有重大意义的。有些这方面的結果将在 §5.9 提及。

在以下各节还要假設下述的重要条件也滿足：

$$\frac{m^{(3)}(t, x, \Delta)}{m^{(2)}(t, x, \Delta)}\to 0,\quad \Delta\to 0.\qquad(5.34)$$

这个条件在下面的情况下成立：对于无限小的 Δ，在公式(5.33)中决定 $m^{(3)}(t, x, \Delta)$ 数値的，只靠无限小的差 $y-x$，更清楚地說：

$$\frac{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}|y-x|^{3}\,dF(t, x, t+\Delta, y)}{\int_{-\infty}^{\infty}|y-x|^{3}\,dF(t, x, t+\Delta, y)}\to 1,\quad \Delta\to 0,\qquad(5.35)$$

只在这个場合里，我們的随机过程才眞正算是在时間上連續的。从(5.34)又得公式

$$\frac{m^{(2)}(t, x, \Delta)}{m^{(1)}(t, x, \Delta)}\to 0,\quad \Delta\to 0.$$

此外，又假定 $F(s, x, t, y)$ 在 $s\neq t$ 时各偏导数直到第四阶都存在，并且固定了 t 和 y，在 $t-s>k>0$ 时，对于 s 和 x 是一致有界的。从(5.1)及(5.33)可得当 $s=t$ 时，$F(s, x, t, y)$ 一定有一个不連續点，函数

$$f(s, x, t, y)=\frac{\partial}{\partial y}F(s, x, t, y)\qquad(5.36)$$

显然适合方程(5.7)，(5.8)，(5.9)，且当 t 和 y 固定，而 $t-s>k>0$ 时，其对 s 和 x 有一致有界的导数，直至第三阶。这种微分分布函数 $f(s, x, t, y)$ 的其他計算如下。

設

$$a(t, x, \Delta)=\int_{-\infty}^{\infty}(y-x) f(t, x, t+\Delta, y) dy, \tag{5.37}$$

$$b^2(t, x, \Delta)=\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)^2 f(t, x, t+\Delta, y) dy$$
$$=m^{(2)}(t, x, \Delta), \tag{5.38}$$

$$c(t, x, \Delta)=\int_{-\infty}^{\infty}|y-x|^3 f(t, x, t+\Delta, y) dy$$
$$=m^{(3)}(t, x, \Delta). \tag{5.39}$$

依(5.8)及(5.9)得

$$f(s, x, t, y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(s, x, s+\Delta, z) f(s+\Delta, z, t, y) dz$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(s, x, s+\Delta, z)\left[f(s+\Delta, x, t, y)+\frac{\partial f}{\partial x} \frac{z-x}{1}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(z-x)^2}{2}+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{(z-x)^3}{6}\right] dz$$
$$=f(s+\Delta, x, t, y)+a(s, x, \Delta) \frac{\partial}{\partial x} f(s+\Delta, x, t, y)$$
$$+\frac{b^2(s, x, \Delta)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s+\Delta, x, t, y)$$
$$+\theta \frac{c(s, x, \Delta)}{6}, \quad |\theta|<c. \tag{5.40}$$

对于适合 $s+\Delta<\tau<t$ 的 Δ，則 c 可選擇与 Δ 无关。从(5.40)卽得

$$\frac{f(s+\Delta, x, t, y)-f(s, x, t, y)}{\Delta}=-\frac{\partial}{\partial x} f(s+\Delta, x, t, y) \frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta}$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s+\Delta, x, t, y) \frac{b^2(s, x, \Delta)}{2\Delta}-\theta \frac{c(s, x, \Delta)}{6\Delta}. \tag{5.41}$$

我們首先要証明，如果行列式

$$D(s, x, t', y', t'', y'')=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t', y') & \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t'', y'') \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t', y') & \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t'', y'') \end{vmatrix} \tag{5.42}$$

在固定 x 及 s 时，对 t', y', t'', y''，不恒等于 0，則二个商式

$$\frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta} \quad \text{及} \quad \frac{b^2(s, x, \Delta)}{\Delta}$$

在 $\Delta \to 0$ 时，收斂于确定的极限 $A(s, x)$ 及 $B^2(s, x)$。設 t', y', t'', y'' 是实际上如此选擇以使 (5.41) 不等于 0，这就对于足够小的 Δ 也有

$$D(s+\Delta, x, t', y', t'', y'') \neq 0.$$

故方程

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(\Delta)\frac{\partial}{\partial x}f(s+\Delta, x, t', y')+\mu(\Delta)\frac{\partial}{\partial x}f(s+\Delta, x, t'', y'')=0,\\ &\lambda(\Delta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(s+\Delta, x, t', y')+\mu(\Delta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(s+\Delta, x, t'', y'')=1\end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

有唯一的解。于是 $\lambda(\Delta)$ 及 $\mu(\Delta)$ 在 $\Delta \to 0$ 时收斂于 $\lambda(0)$ 及 $\mu(0)$，依 (5.41) 便得

$$\begin{aligned} &\lambda(\Delta)\frac{f(s+\Delta, x, t', y')-f(s, x, t', y')}{\Delta}\\ &\qquad+\mu(\Delta)\frac{f(s+\Delta, x, t'', y'')-f(s, x, t'', y'')}{\Delta}\\ &=-\frac{b^2(s, x, \Delta)}{2\Delta}-(\theta'+\theta'')\frac{c(s, x, \Delta)}{6}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

上式的左边在 $\Delta \to 0$ 时收斂于

$$\Omega=\lambda(0)\frac{\partial}{\partial s}f(s, x, t', y')+\mu(0)\frac{\partial}{\partial s}f(s, x, t'', y''),$$

而其右边，依条件 (5.34) 得知第二項和第一項比起来是一个无穷小量，故第一項收斂于一个确定的极限：

$$B^2(s, x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{b^2(s, x, \Delta)}{\Delta}. \tag{5.45}$$

从 (5.45) 及 (5.34) 即得

$$\frac{c(s, x, \Delta)}{\Delta} \to 0, \quad \Delta \to 0. \tag{5.46}$$

依(5.45)及(5.46)，公式(5.41)在 $\Delta \to 0$ 时变成

$$\lim\left[\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y) \frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta}\right]$$
$$= -\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y) B^2(s, x).$$

既然 $\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y)$ 对于 t 及 y 不恒等于 0，故极限

$$A(s, x) = \lim \frac{a(s, x, \Delta)}{\Delta}$$

$$= \frac{-\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y) B^2(s, x)}{\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y)}, \quad \Delta \to 0 \tag{5.47}$$

也存在。从 (5.41)，(5.45)，(5.46)，(5.47) 經过极限过程即得第一基本微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) = -A(s, x) \frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y)$$
$$- B^2(s, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y). \tag{5.48}$$

若行列式 $D(s, x, t', y', t'', y'')$ 对任何 t', y', t'', y'' 都等于 0，則一般說来极限 $A(s, x)$ 及 $B^2(s, x)$ 是不存在的，如下例所指：

$$f(s, x, t, y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y^3-x^3)^2}{4(t-s)}}, \tag{5.49}$$

这里，当 $x=0$ 时

$$\frac{b^2(s, x, \Delta)}{\Delta} \to +\infty, \quad \Delta \to 0.$$

然而我們可以証明，在 (s, x) 平面上的这种例外点是处处不稠密的。

$A(s, x)$ 及 $B(s, x)$ 的眞正意义是：

$A(s, x)$ 是参数 x 在无穷时間上的平均变化速度。$B(s, x)$ 是过程的微分离差。差式 $y-x$ 在时間 Δ 上的离差是

$$b(s, x, \Delta)=B(s, x)\sqrt{2\Delta}+o(\sqrt{\Delta})=O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.50)$$

差式的平均值是

$$a(s, x, \Delta)=A(s, x)\Delta+o(\Delta)=O(\Delta). \quad (5.51)$$

还应該注意 $|y-x|$ 的平均值 $m^{(1)}(t, x, \Delta)$ 也和离差 $b(s, x, \Delta)$ 一样地与 $\sqrt{\Delta}$ 同阶。如下节所指出的，函数 $A(s, x)$ 及 $B(s, x)$ 在許多場合中能唯一地决定出随机概型。

4. 第二微分方程

在本节中保留前节对函数 $f(s, x, t, y)$ 所作的一切要求，并更假定 $f(s, x, t, y)$ 有到四阶的連續导数。这样就不难从(5.43)推得：若行列式(5.42)不等于0，$\lambda(0)$ 及 $\mu(0)$ 有对 s 及 x 的二阶連續导数，且依(5.43)及(5.47)，$B^2(s, x)$ 及 $A(s, x)$ 也同样有二阶連續导数。

設对于一个固定的 t 給出了一个区間 $a\leqslant y\leqslant b$，在这个区間的任一点上行列式 $D(t, y, u', z', u'', z'')$ 对 u', z', u'', z'' 不等于0。再設 $R(y)$ 是一个只能在开区間 $a<y<b$ 上不等于0的非負函数，且具有有界的三阶以下的导数。則得

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y) R(y) dy=\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b f(s, x, t, y) R(y) dy$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}[f(s, x, t+\Delta, y)-f(s, x, t, y)]R(y)dy$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}R(y)\int_{-\infty}^{\infty}f(s, x, t, z)f(t, z, t+\Delta, y)dz\,dy$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}f(s, x, t, y)R(y)dy\Big]$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}f(s, x, t, z)\int_{-\infty}^{\infty}f(t, z, t+\Delta, y)\Big[R(z)$$

$$+R'(z)(y-z)+R''(z)\frac{(y-z)^2}{2}+R'''(z)\frac{(y-z)^3}{6}\Big]\,dy\,dz$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(s,x,t,z)R(z)dz\Big\}$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,x,t,y)\Big[R'(z)a(t,z,\Delta)$$

$$+R''(z)\frac{b^2(t,z,\Delta)}{2}+\theta\frac{c(t,z,\Delta)}{6}\Big]dz,\ |\theta|\leqslant \sup R'''(\xi),$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(s,x,t,z)[R'(z)A(t,z)+R''(z)B^2(t,z)]dz$$

$$=\int_a^b f(s,x,t,y)[R'(y)A(t,y)+R''(y)B^2(t,y)]dy. \tag{5.52}$$

这里的 Δ 极限过程的根据是 $\frac{a(t,z,\Delta)}{\Delta}$, $\frac{b^2(t,z,\Delta)}{2\Delta}$, $\frac{c(t,z,\Delta)}{\Delta}$ 分别收斂于 $A(t,z)$, $B^2(t,z)$, 0, 而因式 $f(s,x,t,z)$ 則具有对 z 的有限积分。

依分部积分并注意 $R(a)=R(b)=0$, 得

$$\int_a^b f(s,x,t,y)R'(y)A(t,y)dy$$

$$=-\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}[f(s,x,t,y)A(t,y)]R(y)dy, \tag{5.53}$$

同样作二次分部积分，更注意 $R'(a)=R'(b)=0$, 又得

$$\int_a^b f(s,x,t,y)R''(y)B^2(t,y)dy$$

$$=\int_a^b \frac{\partial^2}{\partial y^2}[f(s,x,t,y)B^2(t,y)]R(y)dy. \tag{5.54}$$

从(5.52), (5.53), (5.54)卽得

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(s,x,t,y)R(y)dy=\int_a^b\Big\{-\frac{\partial}{\partial y}[A(t,y)f(s,x,t,y)]$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t,y)f(s,x,t,y)]\Big\}R(y)dy. \tag{5.55}$$

而 $R(y)$ 除上面提的条件外，是完全任意的，故卽推得下述結論：

对于不使行列式 $D(t, y, u', z', u'', z'')$ 等于 0 的点 (t, y)，我們又得第二基本微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} f(s, x, t, y) = -\frac{\partial}{\partial y}[A(t, y) f(s, x, t, y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t, y) f(s, x, t, y)]. \qquad (5.56)$$

第二方程也可以不借助于第一方程而用 §5.3 的方法直接导出，但这样就要对函数 $f(s, x, t, y)$ 加上新的困难的假設，这种假設我們未将它列出。如果要这样做就可仿照(5.41)，得

$$\frac{f(s, x, t, y) - f(s, x, t-\Delta, y)}{\Delta}$$

$$= f(s, x, t-\Delta, y) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\Delta, z, t, y) dz - 1}{\Delta}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} f(s, x, t-\Delta, y) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\Delta, z, t, y)(z-y) dz}{\Delta}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(s, x, t-\Delta, y) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\Delta, z, t, y)(z-y)^2 dz}{2\Delta}$$

$$+ \theta \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\Delta, z, t, y) |z-y|^3 dz}{6\Delta}, \qquad (5.57)$$

然后証明

$$\lim \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\Delta, z, t, y) |z-y|^3 dz}{\Delta} = 0, \quad \Delta \to 0.$$

且各极限

$$\lim \frac{1}{2\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\Delta, z, t, y)(y-z)^2 dz = \bar{B}^2(t, y), \quad \Delta \to 0, \qquad (5.58)$$

$$\lim \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\Delta, z, t, y)(z-y) dz = \bar{A}(t, y), \qquad (5.59)$$

$$\lim \frac{1}{\Delta} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\Delta, z, t, y) dz - 1\right] = \bar{N}(t, y) \qquad (5.60)$$

都存在，則我們的第二方程就变为

$$\frac{\partial}{\partial t}f(s,x,t,y)=\overline{N}(t,y)f(s,x,t,y)+\overline{A}(t,y)\frac{\partial}{\partial y}f(s,x,t,y)$$

$$+\overline{B}^2(t,y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(s,x,t,y) \qquad (5.61)$$

的形状。要証明这个形状和上面所求得的形状完全一致，就还要証明

$$\overline{B}^2(t,y)=B^2(t,y), \qquad (5.62)$$

$$\overline{A}(t,y)=-A(t,y)+\frac{\partial}{\partial y}B^2(t,y), \qquad (5.63)$$

$$\overline{N}(t,y)=\frac{\partial}{\partial y}A(t,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}B^2(t,y). \qquad (5.64)$$

5. 关于第二微分方程的解的唯一性及存在性問題的提法

要函数 $f(s,x,t,y)$ 能由微分方程(5.48)或(5.56)所唯一决定，当然必須提出某种初始条件。对于方程(5.56)可以用以下的做法：依公式(5.8)，函数 $f(s,x,t,y)$ 对于任何 $t>s$ 都滿足条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(s,x,t,y)dy=1 \qquad (5.65)$$

而依条件(5.33)，更得

$$\int_{-\infty}^{\infty}(y-x)^2f(s,x,t,y)dy\to 0,\quad t\to s. \qquad (5.66)$$

解的唯一性的主要問題是：問在什么条件下，对于已給的 s 及 x 才能唯一地对任何 y 及 $t\geqslant s$，定义出一个 t 和 y 的非負函数 $f(s,x,t,y)$，使滿足方程(5.56)并条件(5.65)及(5.66)。在重要的特殊場合，例如以下两节所考慮的場合中，这个問題有一个肯定的回答。

現設两函数 $A(t,y)$ 及 $B^2(t,y)$ 为事先給定。可以这样問：是否有这样的一个非負函数 $f(s,x,t,y)$，旣滿足方程(5.8)及(5.9)(如§5.1所已解出的，这二个要求足以使 $f(s,x,t,y)$ 能定义出一个随机概型)，又在极限过程上依公式(5.45)及(5.47)得出已給函数 $A(t,y)$ 及 $B^2(t,y)$？

这样問題的解决，首先是找出第二微分方程的一个非負且滿足条件(5.65)及(5.66)的解，然后再推究它是否实际是我們問題的一个解，因此我們得出二个問題：

1．在什么条件下，有方程(5.56)的一个这样的解？

2．在什么条件下，能說这个解滿足条件(5.8)及(5.9)？

这些条件是有充分的概括性的。

6．Bachelier 場合

現在設 $f(s, x, t, y)$ 是 s, t 及差式 $y-x$ 的函数，即过程是对于参数为齐次的：

$$f(s, x, t, y)=v(s, t, y-x). \tag{5.67}$$

在这場合中，显然 $A(s, x)$ 及 $B^2(s, x)$ 只是 s 的函数，故微分方程(5.48)及(5.56)可写成

$$\frac{\partial f}{\partial s}=-A(s)\frac{\partial f}{\partial x}-B^2(s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{5.68}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-A(t)\frac{\partial f}{\partial y}+B^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{5.69}$$

对于函数 $v(s, t, z)$，(5.68) 及 (5.69) 給出

$$\frac{\partial v}{\partial s}=-A(s)\frac{\partial v}{\partial z}-B^2(s)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{5.70}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-A(t)\frac{\partial v}{\partial z}+B^2(t)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{5.71}$$

方程(5.71)是 Bachelier 所发現的，但这还未完全証实。

若 $A(t)\equiv 0$，$B(t)\equiv 1$，則方程(5.56)及(5.69)就变成热傳导方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

它的唯一非負，且滿足条件(5.65)及(5.66)的解，我們知道是由 Laplace 公式表出：

$$f(s, x, t, y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-s}}e^{-\frac{(y-x)^2}{\varphi(t-s)}}.$$

对于一般場合，則設

$$x' = x - \int_a^s A(u)\,du, \quad y' = y - \int_a^t A(u)\,du,$$

$$s' = \int_a^s B^2(u)\,du, \quad t' = \int_a^t B^2(u)\,du.$$

条件(5.65)及(5.66)对于新变量 s', x', t', y' 和对于 s, x, t, y 有相同的形状，故得一般場合中的

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t'-s')}} e^{\frac{(y'-x')^2}{4(t'-s')}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} e^{\frac{(y-\alpha)^2}{4\beta}}$$

$$\left(\beta = \int_s^t B^2(u)\,du, \quad \alpha = x - \int_s^t A(u)\,du\right). \tag{5.72}$$

这是滿足我們条件(5.69)的唯一的解。

7. 一个变換

設

$$s' = \varphi(s), \qquad t' = \varphi(t),$$
$$x' = \psi(s, x), \qquad y' = \psi(t, y), \tag{5.73}$$
$$f(s, x, t, y) = \frac{\partial\psi(t, y)}{\partial y} \cdot f'(s', x', t', y').$$

此处，設 $\varphi(t)$ 为連續且永不減少，$\psi(t, y)$ 則对 t 为任意对 y 有連續的正导数。若 $f(s, x, t, y)$ 滿足条件(5.8)及(5.9)，稍計算后可知 f' 关于新变量 s', x', t', y' 也滿足同一的条件；这就是説，我們这个变換导致一个新函数 $f'(s', x', t', y')$，它与 $f(s, x, t, y)$ 同样地定义出一个新的随机概型。

若 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t, y)$ 具有必要的导数，則方程(5.48)及(5.56)对于新变量就变成

$$\frac{\partial f'}{\partial s'} = -A'(s', x')\frac{\partial f'}{\partial x'} - B'^2(s', t')\frac{\partial^2 f'}{\partial x'^2}, \tag{5.74}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial y'}[A'f'] + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}[B'^2 f'], \tag{5.75}$$

在这里假設了

$$\left.\begin{aligned} A'(t',y') &= \left[\frac{\partial^2\psi(t,y)}{\partial y^2}B^2(t,y)+\frac{\partial\psi(t,y)}{\partial y}A(t,y)\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial\psi(t,y)}{\partial t}\right]\div\frac{d\varphi(t)}{dt},\\ B'^2(t',y') &= \left[\frac{\partial\psi(t,y)}{\partial y}\right]^2 B^2(t,y)\div\frac{d\varphi(t)}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{5.76}$$

借助于上面的变换,在許多新型系数 $A(t,y)$ 及 $B^2(t,y)$ 下,方程(5.56)的解都可以表达出来。例如

$$A(t,y)=a(t)y+b(t),\quad B^2(t,y)=e(t), \tag{5.77}$$

而設

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int c(t)\,e^{2\int a(t)dt}\,dt,\\ \psi(t,y) &= ye^{\int a(t)dt}+\int b(t)\,e^{\int a(t)dt}\,dt, \end{aligned} \tag{5.78}$$

即得出对于新变量 s', x', t', y', f' 的最簡单的热傳导方程

$$\frac{\partial f'}{\partial t'}=\frac{\partial^2 f'}{\partial y'^2}. \tag{5.79}$$

在这里,初始条件(5.65)及(5.66)对于 $f'(s',x',t',y')$ 还是一样,故公式

$$f'=\frac{1}{\sqrt{\pi(t'-s')}}\,e^{-\frac{(y'-x')^2}{4(t'-s')}} \tag{5.80}$$

連同(5.78)及(5.73)表出具有系数(5.77)的方程(5.56)的唯一解 $f(s,x,t,y)$ 满足我們的条件。不难看出,在这个場合中,函数 $f(s,x,t,y)$ 必定具有

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\beta}}\,e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4\beta}} \tag{5.81}$$

的形状,其中 α 及 β 只是 s,x,t 的函数但与 y 无关。这是一个重要問題:求出系数 $A(t,y)$ 及 $B^2(t,y)$ 的一切可能类型使不論 s,x,t 为何值都永远得到 Laplace 分布函数(5.81)。

作为第二个例子，考慮

$$A(t, y)=a(t)(y-c), \quad B^2(t, y)=b(t)(y-c)^2.$$

若設

$$\varphi(t)=\int b(t)dt, \quad \psi(t, y)=\log(y-c)+\int[b(t)-a(t)]dt,$$

对于 $f'(s', x', t', y')$ 还又得到方程 (5.79)，其解 (5.80) 是已經知道了。值得注意的是我們只考慮 $x>c$ 及 $y>c$ 的値，因为若 x 或 y 从 c 变到 $+\infty$，x' 或 y' 就从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 了，此时条件(5.65)和(5.66)要过渡到 f' 上是有一些困难的，但也不难避免。

在特例

$$A(t, y)=0, \quad B^2(t, y)=y^2$$

中可得到公式

$$f(s, x, t, y)=\frac{1}{y\sqrt{\pi(t-s)}}e^{\frac{(\log y+t-\log x-s)^2}{4(t-s)}}.$$

从应用的观点看来，最重要的場合是 $A(t, y)$ 及 $B^2(t, y)$ 只是 y 的函数而与时間 t 无关。在当系数具有

$$A(y)=ay+b, \quad B^2(y)=cy^2+dy+e \tag{5.82}$$

的形状时，我們的問題可得到有效的解答。

8. 穩定的分布函数

若对于时間 t_0 已知一个微分分布函数 $g(t_0, y)$，那末可以完全仿一般公式(2.5)而有公式

$$g(t, y)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t_0, x)f(t_0, x, t, g)dx,$$

它給出任何时間 $t>t_0$ 的分布函数。$g(t, y)$ 显然满足方程

$$\frac{\partial g}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}[A(t, y)\cdot g]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t, y)\cdot g].$$

假系数 $A(t, y)$ 与 $B^2(t, y)$ 只与 y 有关(过程对于时間为齐次)，我們来研究什么函数 $g(t, y)$ 对于时間説是不变的。对于一

个这样的函数，自然地应满足

$$-Ag+[B^2g]'=c. \tag{5.83}$$

若假設在$y=\pm\infty$时 g 及 g' 收斂于 0，且收斂得那么快，使 (5.83) 的左边也趋于 0，那末就得 $c=0$，且

$$\frac{g'}{g}=\frac{A-(B^2)'}{B^2}, \tag{5.84}$$

此外函数 $g(y)$ 还滿足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\,dy=1.$$

在大多数的場合中可以証明，若有一个稳定解 $g(x)$ 存在，则 $f(s,x,t,y)$ 在 $t\to\infty$ 时对任何常量的 s 及 x 都收斂于 $g(y)$，这样一来，我們知道 $g(y)$ 不仅是一个稳定的解而且是一个极限解。

若系数 A 及 B^2 取 (5.82) 的形式，则 (5.84) 就和 Pearson 方程

$$\frac{g'}{g}=\frac{y-p}{q_0+q_1y+q_2y^2}$$

一样了，式中的

$$p=\frac{d-b}{a-2c},\ q_0=\frac{c}{a-2c},\ q_1=\frac{d}{a-2c},\ q_2=\frac{e}{a-2c},$$

故可以做出一种随机概型以任何 Pearson 分布函数作它的稳定解。

9. 其他的可能

从§5.3到§5.8中所建立的理論，基本上是建立在条件(5.34)上的。如果我們放弃这个条件，卽令在条件(5.33)之下，也有許多新的可能。作为举例，我們考慮由分布函数

$$F(s,x,t,y)=e^{-a(t-s)}\sigma(y-x)+(1-e^{-a(t-s)})\int_{-\infty}^{\infty}u(z)\,dz$$

所定义的一个概型，其中 $\sigma(z)$ 在 $z<0$ 时为 0；在 $z\geqslant 0$ 时为 1，至于 $u(z)$ 则为滿足下述条件的非負連續函数：

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(z)\,dz=1 \text{ 并有限的矩} \int_{-\infty}^{\infty} u(z)\,|z|^{i}\,dz \quad (i=1, 2, 3).$$

不难算出，此时函数 $F(s, x, t, y)$ 能够满足 (5.1)，(5.2) 以至于 (5.33)的要求。

对于这个概型，我們可以这样解释：經过无穷小时間 $(t, t+dt)$，参数 y 以概率 $1-a\,dt$ 保持不变而以概率 $au(z)\,dt\,dz$ 变到 $z<y'<z+dz$ 中的 y'. 故在每一段时間內都有跳跃的可能，而对于参数 y 的值的分布函数在跳跃之后是与以前的参数值无关的。

設在 $t=t_0$ 上已給了一个連續的微分分布函数 $g(t_0, y)$，对于任何 $t>t_0$ 有

$$\begin{aligned} g(t, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t_0, y)\,dF(t_0, x, t, y) \\ &= e^{-a(t-t_0)} g(t_0, y) + [1-e^{-a(t-t_0)}]u(y). \end{aligned}$$

上面所得到的概型，又可推广如下：

我們設想，經过无穷小时間 $(t, t+dt)$，参数 y 以概率 $1-a(t, y)\,dt$ 保持不变而以概率 $u(t, y, z)\,dt\,dz$ 变到 $z<y'<z+dz$ 中的 y'. 这样，自然可設

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, y, z)\,dz = a(t, y). \tag{5.85}$$

在这个場合中，我們可以期望 $g(t, y)$ 将滿足积微方程

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, y) = -a(t, y)\cdot g(t, y) + \int_{-\infty}^{\infty} g(t, z)\,u(t, z, y)\,dz.$$

若不仅考虑跳跃同时也考虑連續改变，那末当然要求 $g(t, y)$ 滿足方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t, y) = &-a(t, y) g(t, y) + \int_{-\infty}^{\infty} g(t, z)\,u(t, z, y)\,dz \\ &- \frac{\partial}{\partial y}[A(t, y) g(t, y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t, y) g(t, y)]. \end{aligned}$$

此处假設 (5.84) 滿足，且 $A(t, y)$ 及 $B^2(t, y)$ 取 §5.3 中的含义。

§6 結 束 語

若考虑的体系，其状态是由 n 个实参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所定出，那末在一定条件之下也可以得到相应于§5.3所得到的微分方程，用以給定微分分布函数 $f(s, x_1, x_2, \cdots, x_n, t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$：

$$\frac{\partial f}{\partial s}=-\sum_1^n A_i(s,x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n B_{ij}(s,x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial y_i}[A_i(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)f]$$

$$+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}[B_{ij}(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)f].$$

在 $A_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 及 $B_{ij}(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 只与 t 有关的場合，这些方程已为 Bachelir 所发現与解决[1]。在这个場合，满足我們問題条件的解具下述形式：

$$f=Pe^{-\frac{\sum P_{ij}(y_i-x_i-q_i)(y_j-x_j-q_j)}{Q}},$$

其中 P, Q, P_{ij}, q_i 只与 s 和 t 有关。

至于体系的状态，同时是以連續参数及离散参数来共同定义的这种混合概型，是值得进行研究的。

---

[1] Les probabilités à plusieurs variables, ibid. 27, 1910, p. 339.